目　录

Contents

第1章

某些非线性演化方程的物理背景

早在1834年，英国著名科学家罗素(J. Scott. Russell)发现了孤立波现象. 随着近代物理学和数学的发展，近二十多年来，人们对这一现象的兴趣与日俱增. 现在，数值计算和理论分析均已证明，一大批非线性演化方程具有孤立子解. 孤立波具有非常奇特的性质，它们在相互作用下保持稳定的波形，这颇类似于粒子碰撞的性质. 据此，克鲁斯卡(Kruskal)和扎布斯基(N. J. Zabusky)将其命名为"孤立子". 孤立波不仅能在自然界中被观察到，现在，一些孤立波已能在实验室中产生.

随着孤立子问题研究的深入和发展，一大批具有孤立子解的非线性演化方程已在流体物理、固体物理、基本粒子物理、激光、等离子体物理、超导物理、凝聚态物理、生物物理等许多领域中出现. 例如1895年由浅水波导出的KdV(科特韦格-德弗里斯)方程，又在离子声波、冷的等离子体磁流体波、非线性晶格等一系列问题中相继得到. 这批具有孤立子解的非线性演化方程有：非线性薛定谔方程、正弦-戈登方程、朗道-利弗席茨方程、布森内斯克方程、二维卡多姆采夫-佩特维亚什维利方程等. 这些方程具有许多共同的特征，例如：可用散射反演方法求解，存在贝克隆变换、达布变换，具有无穷多个守恒律和延长结构等. 由于这些属于可积系统的非线性演化方程是和物理问题紧密相关的，本章将简要介绍某些重要方程的实际物理背景. 这对于偏微分方程的定性研究是有所帮助的.

§1 KdV 方程和弱非线性作用下的波动方程

我们已经知道，KdV 方程首先是由科特韦格(D. J. Kortoweg)和德弗里斯(G. de Vries)于 1895 年研究水波在长波近似、小的但为有限的振幅的假定下得到的. 我们先从水波出发来推导这一方程，然后对其他介质在弱非线性作用假定下再得到这一方程.

设在常数重力场中考虑无粘性的不可压缩的流体(水). 空间坐标系为(x_1, x_2, y)，速度 $\boldsymbol{u}$ 的分量为(u_1, u_2, v)，重力加速度取为 y 轴的负方向. 于是，有方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=\frac{1}{\rho}\nabla p-g\boldsymbol{j}. \tag{1.2}$$

现考虑无旋运动，即 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}=0$. 故存在速度势 $\boldsymbol{u}=\nabla\varphi$. 由

$$\nabla\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2\right)=(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}-\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} \tag{1.3}$$

和对(1.2)积分，可得

$$\frac{p-p_0}{p_0}=B(t)-\varphi_t-\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2-gy,$$

其中 $B(t)$为任意函数，p_0 为任意常数. 令

$$\varphi'=\varphi-\int B(t)dt,$$

可得

$$\boldsymbol{u}=\nabla\varphi,\qquad \frac{p-p_0}{p_0}=-\varphi'_t-\frac{1}{2}(\nabla\varphi')^2-gy. \tag{1.4}$$

以后仍记 φ' 为 φ. 由(1.1)得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0\Rightarrow\nabla^2\varphi=0. \tag{1.5}$$

设水的表面方程为

$$f(x_1, x_2, y, t)=0. \tag{1.6}$$

在此表面上，流体质点不能穿过它，因此，正交于此曲面的流体速

度必须等于曲面的法向速度.(1.6)的法向速度为$\frac{-f_t}{\sqrt{f_{x_1}^2+f_{x_2}^2+f_y^2}}$，流体的法向速度为$\frac{u_1 f_{x_1}+u_2 f_{x_2}+v f_y}{\sqrt{f_{x_1}^2+f_{x_2}^2+f_y^2}}$，相等的条件为

$$f_t+u_1 f_{x_1}+u_2 f_{x_2}+v f_y=0. \tag{1.7}$$

特别，当$y=\eta(x_1, x_2, t)$、$f(x_1, x_2, y, t)\equiv\eta(x_1, x_2, t)-y$时，由(1.7)得

$$\eta_t+u_1\eta_{x_1}+u_2\eta_{x_2}=0. \tag{1.8}$$

此外，在自由面上，$p=p_0$(忽略空气的运动)，故有

$$\begin{cases}\eta_t+\varphi_{x_1}\eta_{x_1}+\varphi_{x_2}\eta_{x_2}=\varphi_y, \\ \varphi_t+\frac{1}{2}(\varphi_{x_1}^2+\varphi_{x_2}^2+\varphi_y^2)+g\eta=0.\end{cases} \quad (\eta=\eta(x_1, x_2, t)) \tag{1.9}$$

其中$u_1=\varphi_{x_1}$，$u_2=\varphi_{x_2}$，$v=\varphi_y$。由固体边界条件，流体的法向速度必须为0，$\boldsymbol{n}\cdot\nabla\varphi=0$。特别在底部$y=-h_0(x_1, x_2)$，有

$$\varphi_y+\varphi_{x_1}h_{0x_1}+\varphi_{x_2}h_{0x_2}=0.$$

如为水平底，有$\varphi_y=0$，$y=-h_0$。于是我们整个问题的提法如下：寻求速度势φ和表面η，满足

$$\nabla^2\varphi=0; \tag{1.10}$$

$$\begin{cases}\eta_t+\varphi_{x_1}\eta_{x_1}+\varphi_{x_2}\eta_{x_2}=\varphi_y, \\ \varphi_t+\frac{1}{2}(\varphi_{x_1}^2+\varphi_{x_2}^2+\varphi_y^2)-g\eta=0;\end{cases} \quad y=\eta(x_1, x_2, t), \tag{1.11}$$

$$\varphi_y=0, \qquad y=-h_0. \tag{1.12}$$

为简单起见，以下考虑一维情况，即$\eta=\eta(x, t)$．取y为从水平底测量的高度，此时，$\varphi_y=0$，$y=0$．引进两个参量：$\alpha=\frac{a}{h_0}$，$\beta=\frac{h_0^2}{l^2}$，其中a为波的振幅，l为波长，$y=h_0+\eta$．令$x=lx'$，$y=h_0 y'$，$t=\frac{lt'}{c_0}$，$\eta=a\eta'$，$\varphi=\frac{gl\varphi'}{c_0}$，$c_0^2=8h_0$．再忽略“′”记号，由(1.5)、(1.11)、(1.12)有

$$\beta\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0, \qquad 0<y<1+\alpha\eta; \tag{1.13}$$

$$\varphi_y=0, \qquad y=0; \tag{1.14}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\eta_t+\alpha\varphi_x\eta_x-\frac{1}{\beta}\varphi_y=0,\\
&\eta+\varphi_t+\frac{1}{2}\alpha\varphi_x^2+\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta}\varphi_y^2=0,
\end{aligned}\right\}\ y=1+\alpha\eta. \tag{1.15}
$$

设(1.14)、(1.15)的形式解为

$$
\varphi=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{y^{2m}}{(2m)!}\frac{\partial^{2m}f}{\partial x^{2m}}\beta^{2m}, \tag{1.16}
$$

其中 $f=f_0(x, t)$. 将(1.16)代入(1.15)第一式，得

$$
\eta_t+\alpha\left[f_x-(1+\alpha\eta)\eta_x f_{xx}\beta-\frac{(1+\alpha\eta)^2}{2}f_{xxx}\beta+\cdots\right]\eta_x
$$

$$
+(1+\alpha\eta)f_{xx}-\frac{1}{3!}(1+\alpha\eta)^3 f_{xxxx}\beta+o(\beta^2)=0,
$$

即

$$
\eta_t+\{(1+\alpha\eta)f_x\}_x-\left\{\frac{1}{6}(1+\alpha\eta)^3 f_{xxxx}\right.
$$

$$
\left.+\frac{\alpha}{2}(1+\alpha\eta)^2 f_{xxx}\eta_x\right\}\beta+o(\beta^2)=0. \tag{1.17}
$$

同样，代入(1.15)的第二式，得

$$
\eta+f_t+\frac{1}{2}\alpha f_x^2-\frac{1}{2}(1+\alpha\eta)^2
$$

$$
\cdot\{f_{xxt}+\alpha f_x f_{xxx}-\alpha f_{xx}^2\}\beta+o(\beta^2)=0. \tag{1.18}
$$

在(1.17)和(1.18)中，如果忽略 β 的一次项，并由(1.18)对 x 求导数，得

$$
\begin{cases}
\eta_t+\{(1+\alpha\eta)w\}_x=0,\\
w_t+\alpha w w_x+\eta_x=0.
\end{cases}\qquad (w=f_x) \tag{1.19}
$$

如果保留 β 的一次项，则有

$$
\begin{cases}
\eta_t+\{(1+\alpha\eta)w\}_x-\dfrac{1}{6}\beta w_{xxx}+o(\alpha\beta,\ \beta^2)=0,\\
w_t+\alpha w w_x+\eta_x-\dfrac{1}{2}\beta w_{xxt}+o(\alpha\beta,\ \beta^2)=0.
\end{cases} \tag{1.20}
$$

如果在(1.20)中忽略 α、β 的一次以上的项，则当 $w=\eta$ 时，有同一方程 $\eta_t+\eta_x=0$. 故 w 可依 α、β 展开：

$$
w=\eta+\alpha A+\beta B+o(\alpha^2+\beta^2),
$$

其中 A、B 是 η 及 η 对 x 的导数的函数. 由(1.20)可得

$$\eta_t+\eta_x+\alpha(A_x+2\eta\eta_x)+\beta\left(B_x-\frac{1}{6}\eta_{xxx}\right)+o(\alpha^2+\beta^2)=0,$$

$$\eta_t+\eta_x+\alpha(A_t+\eta\eta_x)+\beta\left(B_t-\frac{1}{2}\eta_{xxt}\right)+o(\alpha^2+\beta^2)=0.$$

因为 $\eta_t=-\eta_x+o(\alpha, \beta)$, 故在一阶项中对 t 的导数可换为对 x 的导数, 特别当取 $A=-\frac{1}{4}\eta^2$、$B=\frac{1}{3}\eta_{xx}$ 时, 上面两个方程一致, 有

$$\eta_t+\eta_x+\frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x+\frac{1}{6}\beta\eta_{xxx}+o(\alpha^2+\beta^2)=0, \tag{1.21}$$

此时

$$w=\eta-\frac{1}{4}\alpha\eta^2+\frac{1}{3}\beta\eta_{xx}+o(\alpha^2+\beta^2).$$

在方程(1.21)中如忽略二阶项, 则得到典型的 KdV 方程

$$\eta_t+\eta_x+\frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x+\frac{1}{6}\beta\eta_{xxx}=0. \tag{1.22}$$

如在(1.22)中, 由于 $\eta_t=-\eta_x+o(\alpha, \beta)$, 将 η_{xxx} 换成 $-\eta_{xxt}$, 则有

$$\eta_t+\eta_x+\frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x-\frac{1}{6}\beta\eta_{xxt}=0, \tag{1.23}$$

此即 BBM 方程.

下面来推导一类相当广泛的弱非线性相互作用下的波动方程组. 它们可最后归结为 KdV 方程或伯格斯(J. M. Burgers)方程

$$\begin{cases}\eta_t+(nu)_x=0, & (1.24)\\ (nu)_t+(nu^2+P)_x=0, & (1.25)\\ P=P(f,\ n,\ u,\ f_i,\ n_i,\ u_i,\ f_{ij},\ n_{ij},\ u_{ij},\ \cdots), & (1.26)\\ F(f,\ n,\ u,\ f_i,\ n_i,\ u_i,\ f_{ij},\ \eta_{ij},\ u_{ij},\ \cdots)=0, & (1.27)\end{cases}$$

其中 η、u、f 为状态变元, 以 n 表示质点的数密度, u 表示质点的速度, i、j 分别表示对空间变元 x 和时间变元 t 的导数, P 一般表示状态变量(n, u, f)及其导数的函数, 如果 f 代表参量函数, 则 P 为 η、u 及其导数的函数, (1.24)为质量守恒, (1.25)为动量守恒. 以下举几个例子来说明:

(1) 气体动力学: f 为压力 p,

$$P=\frac{1}{m}(p-\mu u_x),\qquad F=p-A\rho^r,\qquad mn=\rho,\tag{1.28}$$

其中 ρ 为密度, μ 为粘性系数.

(2) 浅水波: η 为水深 h, 此时仅有两个状态变元 h、u,

$$P=\frac{1}{2}gh^2-\frac{1}{3}h^3(u_{xt}+uu_{xx}+u_x^2).\tag{1.29}$$

(3) 冷的等离子体的磁流体波: f 为磁强 B, $P=\frac{1}{2}B^2$,

$$F\equiv B-n-\left(\frac{B_x}{n}\right)_x=0.\tag{1.30}$$

(4) 冷的等离子体的离子声波: f 为静电势, ψ 为波函数,

$$P=e^{\psi}-\frac{1}{2}\psi_x^2,\qquad F\equiv n-e^{\psi}+\psi_{xx}=0.\tag{1.31}$$

在局部热力学平衡状态下, 若 P、F 中所有导数消失, 则有

$$P=P(f,n),\qquad F(f,n)=0.\tag{1.32}$$

此时, 由(1.25)有

$$nu_t+nuu_x+P_x=0,\qquad P_x=\frac{\partial P}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial x}.$$

再利用 $\frac{\partial F}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial x}=0$, 消去 $\frac{\partial f}{\partial x}$, 即得

$$u_t+uu_x+\frac{a^2}{n}n_x=0,\qquad a^2=\left[P_n-\frac{F_n}{F_f}P_f\right].$$

若 $a^2>0$, 则有

$$\begin{cases}n_t+(nu)_x=0,\\ u_t+uu_x+\dfrac{a^2}{n}n_x=0.\end{cases}\tag{1.33}$$

(1.33)是双曲型方程组, 其特征线为 $\frac{dx}{dt}=u\pm a$, a 为波速. 由关于均匀态的小扰动, 即得波动方程

$$u_{tt}-a_0^2u_{xx}=0,$$

其中 a_0 为均匀波速. 在以下推导 KdV 方程和伯格斯方程中，必须考虑小扰动的非线性项的影响，即 P, F 导数的效应. 我们作如下的变换:

$$\begin{cases} \xi = \varepsilon^{\alpha}(x - a_0 t), \\ \tau = \varepsilon^{\alpha+1} t, \end{cases} \tag{1.34}$$

其中 ε 表示初始扰动的振幅，恒设 $\varepsilon<1$; 指数 $\alpha>0$, 待定; a_0 表示某种波速，视为常数. 在变换(1.34)下，(1.24)、(1.25)为

$$\varepsilon n_{\tau} + (u - a_0) n_{\xi} + n u_{\xi} = 0, \tag{1.35}$$

$$\varepsilon u_{\tau} + (u - a_0) u_{\xi} + n^{-1} P_{\xi} = 0. \tag{1.36}$$

状态变元(n, f, u)必按 ε 在平衡态 $A=(n, f, u)=(n_0, f_0, 0)$的附近作渐近展开:

$$n = n_0 + \varepsilon n^{(1)} + \varepsilon^2 n^{(2)} + \cdots,$$

$$f = f_0 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \cdots,$$

$$u = 0 + \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \cdots.$$

P、F 也作展开

$$P = P_0 + P_{f_0}(f - f_0) + P_{n_0}(n - n_0) + P_{u_0}(u - u_0) + o(\varepsilon^2),$$

$$F = F_0 + F_{f_0}(f - f_0) + F_{n_0}(n - n_0) + F_{u_0}(u - u_0) + o(\varepsilon^2).$$

由于方程具有伽利略不变性，$P_{u_0} = F_{u_0} = 0$, 由

$$P^{(1)} = P_{f_0} f^{(1)} + P_{n_0} n^{(1)}, \qquad F_{f_0} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \xi} + F_{n_0} \frac{\partial n^{(1)}}{\partial \xi} = 0,$$

有

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial \xi} = P_{f_0} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \xi} + P_{n_0} \frac{\partial n^{(1)}}{\partial \xi}$$

$$= \left[P_{n_0} - \left(\frac{F_{n_0}}{F_{f_0}} \right) P_{f_0} \right] \frac{\partial n^{(1)}}{\partial \xi} = a_0^2 \frac{\partial n^{(1)}}{\partial \xi}.$$

若上述展开考虑到二阶项，可得

$$P_{\xi}^{(2)} = a_0^2 n_{\xi}^{(2)} + A n n_{\xi}^{(1)} + \varepsilon^{\alpha-1} B n_{\xi\xi}^{(1)} + \varepsilon^{2\alpha-1} C n_{\xi\xi\xi}^{(1)},$$

常数 a_0、A、B、C 对于上述例子具有如下的表:

	a_0	A	B	C
空气动力学	$2kT/m$	0	$-\nu a_0$	0
水　　波	gh_0	0	0	$gh_0^2/3$
磁流体波	B_0	1	0	1
离子声波	1	0	0	1

由(1.35)、(1.36)，比较 ε 一阶项，有

$$a_0 n_\xi^{(1)} = n_0 u_\xi^{(1)}, \qquad a_0 u_\xi^{(1)} = \left(\frac{a_0^2}{n_0}\right) n_\xi^{(1)}.$$

进行积分，并利用边界条件，有 $a_0 n^{(1)} = n_0 u^{(1)}$. 代入(1.35)和(1.36)，取二级近似，得

$$n_\tau^{(1)} + u^{(1)} n_\xi^{(1)} + n_0 u_\xi^{(1)} + n^{(2)} u_\xi^{(1)} - a_0 n_\xi^{(2)} = 0,$$

即
$$n_\tau^{(1)} + 2\frac{a_0}{n_0} n^{(1)} n_\xi^{(1)} - a_0 n_\xi^{(2)} + n_0 u_\xi^{(2)} = 0$$

及

$$\frac{a_0}{n_0} n_\tau^{(1)} + \frac{A}{n_0} n^{(1)} n_\xi^{(1)} + \varepsilon^{\alpha-1} \frac{B}{n_0} n_{\xi\xi}^{(1)} + \varepsilon^{2\alpha-1} \frac{C}{n_0} n_{\xi\xi\xi}^{(1)}$$
$$+ \frac{a_0^2}{n} n_\xi^{(2)} + u^{(1)} u_\xi^{(1)} - a_0 u_\xi^{(2)} = 0.$$

由 $-a_0 u_\xi^{(2)} + \frac{a_0^2}{n_0} n_\xi^{(2)} = \frac{a_0}{n_0}\left(n_\tau^{(1)} + 2\frac{a_0}{n_0} n^{(1)} n_\xi^{(1)}\right)$，消去 $n_\xi^{(2)}$、$u_\xi^{(2)}$，即得 $n^{(1)}$ 满足的方程

$$n_\tau^{(1)} + \left(\frac{A}{2a_0} + \frac{3}{2}\frac{a_0}{n_0}\right) n^{(1)} n_\xi^{(1)}$$
$$+ \varepsilon^{\alpha-1} \frac{B}{2a_0} n_{\xi\xi}^{(1)} + \varepsilon^{2\alpha-1} \frac{C}{2a_0} n_{\xi\xi\xi}^{(1)} = 0. \tag{1.37}$$

在方程(1.37)中，如 $B \neq 0$（耗散，$B < 0$），$\alpha = 1$，$C = 0$，则得到伯格斯方程；如 $B = 0$（色散）、$\alpha = \frac{1}{2}$，则得到 KdV 方程

$$n_\tau^{(1)} + \left(\frac{A}{2a_0} + \frac{3}{2}\frac{a_0}{n_0}\right) n^{(1)} n_\xi^{(1)} + \frac{C}{2a_0} n_{\xi\xi\xi}^{(1)} = 0. \tag{1.38}$$

下面简单地讨论 KdV 方程

$$u_t+uu_x+\mu u_{xxx}=0 \tag{1.39}$$

的孤立子解．其中，常数 μ 可正可负．若 $\mu<0$ 时，作变换 $u\to -u$, $x\to -x$, $t\to t$，则(1.39)可变为

$$u_t+uu_x-\mu u_{xxx}=0. \tag{1.40}$$

因此恒可设 $\mu>0$．令 $u(x, t)=u(\xi)$, $\xi=x-Dt$, $D=\text{const}$，代入(1.40)，并对 ξ 积分二次，可得

$$3\mu\left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2=-u^3+3Du^2+6Au+6B=f(u), \tag{1.41}$$

其中 A、B 为积分常数．(1.41)的解仅当 $f\geqslant 0$ 时才可能是实的 $(\mu>0)$．如果 $f(u)$ 仅有一个实根，则它是无界的．现在我们假设函数 $f(u)$ 有三个实根，即 $f(u)=-(u-c_1)(u-c_2)(u-c_3)$，其中 $c_1<c_2<c_3$，由此推出：

$$D=\frac{1}{3}(c_1+c_2+c_3),$$

$$A=\frac{1}{6}(c_1c_2+c_2c_3+c_3c_1),$$

$$B=\frac{1}{6}(c_1c_2c_3).$$

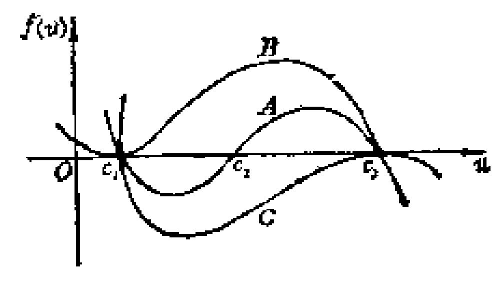


图 1-1

函数 $f(u)$ 的一般形式如图 1-1 的曲线 A 所示．

(1.41)的精确解能表示为雅可比椭圆函数

$$u=u(x, t)=c_2+(c_3-c_2)c_n^2\cdot\left[\sqrt{\frac{c_3-c_2}{12\mu}}\left\{x-\frac{1}{3}(c_1+c_2+c_3)t\right\}, k\right], \tag{1.42}$$

其中 $k^2=\dfrac{c_3-c_2}{c_3-c_1}$．周期波列方程(1.42)通常被称为椭圆函数波(cnoidal wave)．由于函数 c_n 的实周期为 $2k$，k 为第一椭圆积分，因此"cnoidal"波的周期为 $T_p=4k\sqrt{\dfrac{3\mu}{c_3-c_1}}$．

当 $k=0$ 时，$c_n(\xi, 0)=\cos\xi$，此时方程(1.41)具有振动解

$$u=\bar{c}+a\cos\left\{2\sqrt{\frac{c_3-c_1}{12\mu}}\left[x_1-\frac{1}{3}(c_1+c_2+c_3)t\right]\right\}, \tag{1.43}$$

其中 $\bar{c}=\frac{c_2+c_3}{2}$，$a=\frac{c_3-c_2}{2}$.

当 $k=1$ 时，$c_n(\xi, 1)=\operatorname{sech}\xi$，即当 $c_2\to c_1$ 时，如图 1-1 中曲线 B 所示，此时周期变成无穷大，得到 KdV 方程(1.39)常见的孤立子解

$$u=c_1+(c_3-c_1)\operatorname{sech}^2\left\{\sqrt{\frac{c_3-c_1}{12\mu}}\left[x-\frac{1}{3}(2c_1+c_3)t\right]\right\}. \tag{1.44}$$

若设 $c_1=u_\infty$，$c_3-c_1=a$，则(1.44)变成

$$u=u_\infty+a\operatorname{sech}^2\left\{\sqrt{\frac{a}{12\mu}}\left[x-\left(u_\infty+\frac{a}{3}\right)t\right]\right\}, \tag{1.45}$$

这里 u_∞ 表示在无穷远处的均匀态，a 表示孤立子的振幅. 从(1.45)可以看出，这种孤立波相对于均匀态的速度，是正比于振幅的，而波的宽度则反比于振幅的平方根，且振幅与均匀态无关. 若 $u_\infty=0$、$\mu=1$，则从(1.45)可得

$$u(x, t)=3D\operatorname{sech}^2\frac{\sqrt{D}}{2}(x-Dt). \tag{1.46}$$

§2 萨哈罗夫方程和等离子体的孤立子

60年代末以来，已有很多文章对孤立波在等离子体中的传播作了研究. 在激光打靶中，人们观察到在临界面附近形成的密度凹陷，由于坍塌出现的涡旋性孤立波的传播，及激光光束在非线性介质中自聚焦时产生的孤立子，高频电场产生的朗缪尔(I. Langmuir)孤立子以及高频横场产生的光孤立子等. 由于实验技术的不断提高，在等离子体和激光相互作用中，已观察到越来越多的很有意义的孤立子现象.

我们从双流体力学方程组出发，可得到重要的萨哈罗夫(V. E. Zakharov)方程、非线性薛定谔(E. Schrödinger)方程，以及离子声孤立子、朗缪尔孤立子、光孤立子等.

双流体力学方程组是指电子、离子流体力学方程组．离子方程组

$$\frac{\partial n_i}{\partial t}+\nabla\cdot n_i\boldsymbol{v}_i=0, \tag{2.1}$$

$$n_iM\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial t}+\boldsymbol{v}_i\nabla\boldsymbol{v}_i\right)=-T_i\nabla n_i+n_i\cdot e\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{B}}{c}\right); \tag{2.2}$$

电子方程组

$$\frac{\partial n_e}{\partial t}+\nabla\cdot n_e\boldsymbol{v}_e=0, \tag{2.3}$$

$$n_em\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_l}{\partial t}+\boldsymbol{v}_l\nabla\boldsymbol{v}_l\right)=-T_l\nabla n_e-n_ee\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}_e\times\boldsymbol{B}}{c}\right); \tag{2.4}$$

麦克斯韦方程组

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=-\nabla\times\boldsymbol{E}, \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=\nabla\times\boldsymbol{B}-\frac{4\pi e}{c}(n_i\boldsymbol{v}_i-n_l\boldsymbol{v}_l), \tag{2.6}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0. \tag{2.7}$$

其中 n_i、n_e 分别表示离子、电子的数密度；$\boldsymbol{v}_i$、$\boldsymbol{v}_e$ 分别表示离子、电子的运动速度；M、m 分别表示离子、电子的质量；T_i、T_e 分别表示离子、电子的温度，e 表示电子电荷，$\boldsymbol{E}$ 表示电场强度，$\boldsymbol{B}$ 表示磁场强度，c 表示光速，$\nabla\equiv\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$．由于离子速度 $\boldsymbol{v}_i$ 很小，可忽略磁场对它的作用力，即在(2.2)中取 $\frac{\boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{B}}{c}=\boldsymbol{0}$，又因我们考虑问题的尺度很小，只有几个微米，因此，在这里取 T_i、T_l 为常数．

如同通常的做法，可把等离子体的运动分为低频和高频两个部分，离子只作高频运动，把电子量和场量分为低频部分（下标为 l）和高频部分（下标为 h），即

$$n_e=n_l+n_h,\quad \boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_l+\boldsymbol{E}_h,\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_l+\boldsymbol{B}_h. \tag{2.8}$$

引进物理量对时间的平均量

$$\overline{f(x,t)} = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f(x,t)dt,$$

则有

$$\overline{f_t(x,t)} = [\overline{f(x,t)}]_t.$$

因

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\overline{f(x,t)} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f(x,t)dt\right)\\ &= \frac{1}{T}\left[f\left(x,t+\frac{T}{2}\right) - f\left(t,\frac{T}{2}\right)\right]\\ &= \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f_t(x,\tau)d\tau = \overline{f_t(x,t)},\end{aligned}$$

且设 $\overline{\overline{f(x,t)}} = \overline{f(x,t)}$，即平均量与 t 无关.

现对物理量作高频平均. 即选取频率 w，满足

$$\frac{1}{Tw_l} > \frac{1}{Tw} > \frac{1}{Tw_h}.$$

因此有

$$\overline{f_h(x,t)} = 0, \qquad \overline{n_l(x,t)} = n_l(x,t)$$
$$\overline{n_h(x,t)} = 0, \qquad n_l - \bar{n}_e = n_h.$$

对于离子方程, 因只有低频振荡, 取高频平均后无变化, 只是电场强度 $\boldsymbol{E}$ 换成 $\boldsymbol{E}_l$, 于是有

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla\cdot n_i\boldsymbol{v}_i = 0, \tag{2.9}$$

$$n_i M\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i\nabla\boldsymbol{v}_i\right) = -T_i\nabla n_i + n_i e\boldsymbol{E}_l. \tag{2.10}$$

对电子方程取高频平均, 即

$$\frac{\partial \bar{n}_e}{\partial t} + \overline{\nabla\cdot n_e\boldsymbol{v}_e} = 0, \tag{2.11}$$

$$m\left(\overline{\frac{\partial \boldsymbol{v}_e}{\partial t}} + \overline{\boldsymbol{v}_e\nabla\boldsymbol{v}_e}\right) = -T_e\nabla\overline{n_e} - e\left(\overline{\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}_e\times\boldsymbol{B}}{c}}\right). \tag{2.12}$$

将(2.8)代入(2.11)、(2.12), 并利用上述高频平均的一些性质, 可得

$$\frac{\partial n_l}{\partial t}+\nabla\cdot(n_e\boldsymbol{v}_l+\overline{n_h\boldsymbol{v}_h})=0, \tag{2.13}$$

$$m\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}_l}{\partial t}+\boldsymbol{v}_l\nabla\boldsymbol{v}_l+\overline{\boldsymbol{v}_h\nabla\boldsymbol{v}_h}\right)$$

$$=-T_l\nabla\,\overline{\ln n_l}-e\boldsymbol{E}_l-e\,\frac{\overline{\boldsymbol{v}_l\times\boldsymbol{B}_h}}{c}-e\,\frac{\overline{\boldsymbol{v}_l\times\boldsymbol{B}_l}}{c}. \tag{2.14}$$

由于 m 很小，$\boldsymbol{v}_i$ 与 $\boldsymbol{v}_l$ 差不多，故在(2.14)中可忽略 $m\boldsymbol{v}_l$ 的项；再设 $B_l=0$，于是可得

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}_l}{\partial t}=-\frac{4\pi e}{c}(n_i\boldsymbol{v}_i-n_l\boldsymbol{v}_l-\overline{n_h\boldsymbol{v}_h}),$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}_l=4\pi e(n_i-n_l)+f(x) \tag{2.15}$$

或

$$-\Delta\varphi=4\pi e(n_i-n_l)+f(x), \tag{2.16}$$

其中，$E_l=-\Delta\varphi$，$f(x)$为变元 x 的任意函数．为简单计，取 $f(x)=0$，由方程组(2.3)～(2.7)减去平均后的方程组，且设 $\boldsymbol{v}_l=0$，并忽略 $\nabla\cdot(n_h\boldsymbol{v}_h-\overline{n_h\boldsymbol{v}_h})$、$m\{\boldsymbol{v}_h\nabla\boldsymbol{v}_h-\overline{\boldsymbol{v}_h\nabla\boldsymbol{v}_h}\}$等项，在 $\frac{n_h}{n_l}\ll1$ 近似下可得双流体耦合方程组

$$\frac{\partial n_i}{\partial t}+\nabla\cdot(n_i\boldsymbol{v}_i)=0, \tag{2.17}$$

$$n_iM\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}_i}{\partial t}+\boldsymbol{v}_i\nabla\boldsymbol{v}_i\right)=-T_i\nabla n_i+n_ie\boldsymbol{E}_l, \tag{2.18}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}_l=4\pi e(n_i-n_l), \tag{2.19}$$

$$e\boldsymbol{E}_l=-T_e\frac{\nabla n_l}{n_l}-\frac{m}{2}\nabla\boldsymbol{v}_h^2, \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial n_h}{\partial t}+\nabla\cdot(n_l\boldsymbol{v}_h)=0, \tag{2.21}$$

$$m\frac{\partial\boldsymbol{v}_h}{\partial t}=-T_e\nabla\left(\frac{n_h}{n_l}\right)-e\boldsymbol{E}_h, \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}_h}{\partial t^2} - c^2\nabla^2\boldsymbol{E}_h + c^2\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_h) - v_i^2\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_h)$$

$$+ v_i^2\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_h)\cdot\nabla\ln n_l - \frac{\partial \boldsymbol{E}_h}{\partial t}\frac{\partial \ln n_l}{\partial t}$$

$$= \frac{-4\pi n_i e^2}{m}\boldsymbol{E}_h - \frac{mc^2}{2}[\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_h) - \nabla^2\boldsymbol{v}_h]\frac{\partial \ln n_l}{\partial t}, \tag{2.23}$$

其中 c 为光速，$v_e^2=\dfrac{T_e}{m}$ 是电子热运动速度的平方．现设

$$\nabla\left(\frac{n_h}{n_l}\right)\sim\frac{\nabla n_h}{n_l}, \tag{2.24}$$

于是(2.22)可近似为

$$m\frac{\partial \boldsymbol{v}_h}{\partial t} = -T_e\frac{\nabla n_h}{n_e} - e\boldsymbol{E}_h. \tag{2.25}$$

若 $k^2\lambda_D^2\ll1\left(\text{其中 } k \text{ 为波数, } \lambda_D^2=\dfrac{T_e}{4\pi n_0 e^2}\right)$，则有估计

$$\left|\frac{T_e\nabla n_h/n_e}{e\boldsymbol{E}_h}\right|\approx k^2\lambda_D^2\ll1.$$

于是，在(2.25)中可忽略 $-T_e\dfrac{\nabla n_h}{n_e}$ 项，可解出

$$\boldsymbol{v}_h = \frac{e\varepsilon_h(x,\ t)\cdot e^{-iw_pt}}{imw_p} + c.c, \tag{2.26}$$

其中 $\qquad \boldsymbol{E}_h = \varepsilon_h(x,\ t)e^{-iw_pt} + c.c, \qquad w_p = \dfrac{4\pi n_0 e^2}{m}.$

$c.c$ 表示前一项的复数共轭项．

在(2.20)中，

$$-\frac{m}{2}\overline{\nabla \boldsymbol{v}_h^2} = \frac{m}{2}\frac{e^2}{m^2w_p^2}\overline{\nabla \boldsymbol{E}_h^2}.$$

在(2.23)中，再设 $\dfrac{\partial \ln n_l}{\partial t}=0$，于是最后得到简化的双流体方程组

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla n_i\boldsymbol{v}_i = 0, \tag{2.27}$$

$$n_iM\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i\nabla\boldsymbol{v}_i\right) = -T_i\nabla n_i + n_ie\boldsymbol{E}_l, \tag{2.28}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}_l=4\pi e(n_i-n_l),\tag{2.29}$$

$$\boldsymbol{E}_l=-\frac{T_e\nabla n_l}{n_l}-\frac{e^2}{2mv_p^2}\overline{\nabla\boldsymbol{E}_h^2},\tag{2.30}$$

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{E}_h}{\partial t^2}-c^2\nabla^2\boldsymbol{E}_h+c^2\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_h)-v_t^2\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_h)$$

$$=-\frac{4\pi n_e e^2}{m}\cdot\boldsymbol{E}_h^t.\tag{2.31}$$

方程组(2.27)~(2.31)是封闭的，即共有未知函数及未知函数向量5个：n_i，n_l，$\boldsymbol{v}_i$，$\boldsymbol{E}_l$，$\boldsymbol{E}_h$，而方程(包括向量方程)组的个数正好也是5个．它至少有三种波：离子声波，等离子体波和光波．每一个波都有产生空间凝聚的非线性项：离子声波是输运项$\boldsymbol{v}_i\nabla\boldsymbol{v}_i$，等离子体波和光波是方程(2.31)中的非线性项．三种波又都有色散项：离子声波是电荷分离项$\nabla\cdot\boldsymbol{E}_l$，等离子体波是$v_t^2\nabla^2\boldsymbol{E}_h$项，光波是$c^2\nabla^2\boldsymbol{E}_h$项．由于非线性项和色散项相互作用达到的某种平衡，形成了声、等离子体、光孤立子．从这套方程组出发，就可得到萨哈罗夫方程和非线性薛定谔方程等．

把高频振荡取作0，方程组(1.27)~(1.31)为

$$\frac{\partial n_i}{\partial t}+\nabla\cdot(n_i\boldsymbol{v}_i)=0,\tag{2.32}$$

$$n_iM\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}_i}{\partial t}+\boldsymbol{v}_i\nabla\boldsymbol{v}_i\right)=-T_i\nabla n_i-n_ie\nabla\varphi,\tag{2.33}$$

$$\nabla^2\varphi=4\pi e(n_l-n_i),\tag{2.34}$$

$$n_l=n_0\exp\left(\frac{e\varphi}{T_e}\right),\tag{2.35}$$

其中$\boldsymbol{E}_h=0$，$\boldsymbol{E}_l=-\nabla\varphi$为纵波．考虑一维情况，且设$T_i=0$，$\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_0$，无量纲化上述方程组，可得

$$\frac{\partial n_i}{\partial t}+\frac{\partial n_iv_i}{\partial x}=0,\tag{2.36}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_i\frac{\partial v_i}{\partial x}=-\frac{\partial\varphi}{\partial x},\tag{2.37}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=e^\varphi-n_i.\tag{2.38}$$

令 $\xi=x-Dt$，且设 $|x|\to\infty$ 时，$n_i\to1$，$v_i\to0$，$\varphi\to0$，可得

$$n_i(D-v_i)=D, \tag{2.39}$$

$$\frac{1}{2}(D-v_i)^2=\frac{1}{2}D^2-\varphi, \tag{2.40}$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}=e^{\varphi}-n_i(\xi). \tag{2.41}$$

由

$$n_i=\frac{D}{\sqrt{D^2-2\varphi}}, \tag{2.42}$$

可得

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}=e^{\varphi}-\frac{D}{\sqrt{D^2-2\varphi}}=F(\varphi)=G'(\varphi), \tag{2.43}$$

其中

$$G(\varphi)=e^{\varphi}+D\sqrt{D^2-2\varphi}-(D^2+1). \tag{2.44}$$

设 $\delta D=D-1\ll1$，则由(2.43)可得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2=\frac{1}{3}\varphi^2(3\delta D-\varphi), \tag{2.45}$$

$$\varphi(\xi)=3\delta D\,\mathrm{sech}^2\left[\sqrt{\frac{\delta D}{2}}(x-Dt)\right],$$

其中孤立子波的峰值是 $3\delta D$，宽度是 $\sqrt{\dfrac{2}{\delta D}}$。

作变量代换

$$\xi=\varepsilon^{\frac{1}{2}}(x-t),\qquad \tau=\varepsilon^{\frac{3}{2}}t, \tag{2.46}$$

则离子声波方程组(2.36)～(2.38)变为

$$\varepsilon\frac{\partial n_i}{\partial\tau}-\frac{\partial n_i}{\partial\xi}+\frac{\partial n_iv_i}{\partial\xi}=0, \tag{2.47}$$

$$\varepsilon\frac{\partial v_i}{\partial\tau}-\frac{\partial v_i}{\partial\xi}+v_i\frac{\partial v_i}{\partial\xi}=-\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}, \tag{2.48}$$

$$\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}=e^{\varphi}-n_i. \tag{2.49}$$

n_i、v_i、φ 依 ε 展开：

$$n_i = 1 + \varepsilon n^{(1)} + \varepsilon^2 n^{(2)} + \cdots,$$
$$v_i = \varepsilon v^{(1)} + \varepsilon^2 v^{(2)} + \cdots,$$
$$\varphi = \varepsilon \varphi^{(1)} + \varepsilon^2 \varphi^{(2)} + \cdots,$$

代入(2.47)～(2.49)，可得

$$n^{(1)} = v^{(1)} = \varphi^{(1)}, \tag{2.50}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial \xi^2} = \varphi^{(2)} + \frac{(\varphi^{(1)})^2}{2} - n^{(2)}, \tag{2.51}$$

$$\frac{\partial n^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{\partial n^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial n^{(1)} v^{(1)}}{\partial \xi} = 0, \tag{2.52}$$

$$\frac{\partial v^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi} + v^{(1)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi} = -\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \xi}. \tag{2.53}$$

(2.51)对 ξ 求微商，再与(2.52)、(2.53)求和，可得

$$\frac{\partial n^{(1)}}{\partial \tau} + n^{(1)} \frac{\partial n^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 n^{(1)}}{\partial \xi^3} = 0, \tag{2.54}$$

此即 KdV 方程.

从方程(2.27)～(2.31)出发，取 $n_l = n_i$，设

$$n_i(t) = n_0(x) + n(x, t),$$

其中 $n(x, t)$为小量，对方程组(2.27)、(2.28)及(2.31)作线性化，得

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot n_0 v = 0, \tag{2.55}$$

$$n_0 M \frac{\partial v}{\partial t} = -T_i \nabla n_i - T_e \nabla n_i - \frac{n_0 e^2}{2 m w_p^2} \nabla \overline{E_h^2}, \tag{2.56}$$

$$\frac{\partial^2 E_h}{\partial t^2} - v_i^2 \nabla^2 E_h = -\frac{4\pi (n_0 + n)}{m} E_h. \tag{2.57}$$

这里只考虑纵波，即在(2.31)中，$-c^2 \nabla^2 E_h + c^2 \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{E}_h) = 0$，可得(2.57)．记 $E_h = E$，(2.55)对 t 微商一次，(2.56)求一次散度运算，可得

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 n = \nabla^2 \frac{\overline{E^2}}{8\pi M}, \tag{2.58}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - v_e^2 \nabla^2 E = -w_p^2 \left(1 + \frac{n}{n_0}\right) E, \tag{2.59}$$

其中 $c_s^2=\frac{T_i+T_e}{M}\approx\frac{T_e}{M}$，$w_p^2=\frac{4\pi n_0e^2}{m}$. 将 E 写成

$$E(x,\ t)=\varepsilon(x,\ t)e^{iw_pt}+c.c, \tag{2.60}$$

其中 E 的高频部分包含在因子 e^{-iw_pt} 中，$\varepsilon(x,\ t)$ 为缓变振幅. 忽略 ε_{tt} 项，可得

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2}-c_s^2\nabla^2 n=\nabla\ \frac{|\varepsilon|^2}{2\pi M}, \tag{2.61}$$

$$-2iw_p\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}-v_i^2\nabla^2\varepsilon=-w_p^2\ \frac{n}{n_0}\ \varepsilon, \tag{2.62}$$

这就是著名的萨哈罗夫方程. 无量纲化，可得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 n}{\partial t^2}-\Delta n=\Delta|\varepsilon|^2, & (2.63)\\[2ex] i\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\Delta\varepsilon-n\varepsilon=0. & (2.64)\end{cases}$$

令

$$\varepsilon=\varphi(x-ct)e^{-ipt+iqx+i\theta},\qquad n=n(x-ct), \tag{2.65}$$

其中 p、q、θ、c 均为实常数. 将(2.65)代入(2.63)、(2.64)，不难得到它的孤立子解

$$\begin{cases}\varepsilon(x,\ t)=\dfrac{m_1}{\sqrt{2(1-c^2)}}\ \mathrm{sech}\left\{\dfrac{m_1}{2(1-c^2)}(x-ct-x_0)\right\}\\ \qquad\qquad\cdot e^{i\frac{c}{2}-i\left(\frac{c^2}{4}-\frac{m_1^2}{4(1-c^2)}\right)t+i\theta},\\ n(x,\ t)=-\dfrac{m_1^2}{2(1-c^2)^2}\ \mathrm{sech}^2\left\{\dfrac{m_1}{2(1-c^2)}(x-ct-x_0)\right\},\end{cases} \tag{2.66}$$

其中设 $q=\frac{c}{2}$（即使 φ' 的系数为 0）. 这里有 4 个参数，x_0 代表 $t=0$ 时波包位置，θ 代表初始位相，主要参数是 m_1 和 c，c 表示孤立子速度. 从(2.66)可知，c^2 必须小于 1，即孤立子一定是亚音速的. $\frac{m_1^2}{2(1-c^2)^2}$ 是密度凹陷的深度，$\frac{2(1-c^2)}{m_1}$ 是凹陷宽度. 深度是和宽度平方成反比的. 当 $c^2\ll 1$ 时，可作静态近似. 从方程(2.63)得

$$\eta = -|\varepsilon|^2. \tag{2.67}$$

代入(2.64)，即得非线性薛定谔方程

$$i\varepsilon_t + \varepsilon_{xx} + |\varepsilon|^2\varepsilon = 0. \tag{2.68}$$

如果波包在波数 $\boldsymbol{k}$ 空间充分窄小，可得方程组

$$i\varepsilon_t + \nabla^2\varepsilon + n\varepsilon = 0, \tag{2.69}$$

$$\Box n \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)n = \Delta|\varepsilon|^2. \tag{2.70}$$

此时可得到哨孤立子(whister soliton). 由于方程(2.69)中的相互作用项前的符号和萨哈罗夫方程的相反，这就导致了该孤立子运动是超声的，而且它有密度峰，不同于朗缪尔孤立子的密度坑.

当 $c\to 1$ 时，即接近于声速区时，我们从孤立子的表达式(2.66)可看到等离子体扰动密度、能量、孤立子宽度的倒数等均趋于 0. 于是，有些物理学家提出用布森内斯克(M. J. Boussinesq)方程或 KdV 方程来代替声波方程. 在这种情况下，密度扰动较自洽地满足方程

$$n_{tt} - n_{xx} - \beta(n^2)_{xx} - \alpha n_{xxxx} = |\varepsilon|^2_{xx}, \tag{2.71}$$

或

$$n_t + n_x + \beta(n^2)_x + 2n_{xxx} = -|\varepsilon|^2_x. \tag{2.72}$$

对于耦合方程组

$$i\varepsilon_t + \varepsilon_{xx} - n\varepsilon = 0, \tag{2.73}$$

$$n_{tt} - n_{xx} - \frac{\delta}{3}n_{xxxx} - \delta(n^2)_{xx} = |\varepsilon|^2_{xx}, \tag{2.74}$$

其中 $\delta = \dfrac{4}{3}\dfrac{m_l}{m_i}$，我们可找到(2.73)、(2.74)的孤立子解

$$\begin{cases} \varepsilon_{ls}(x,\ t) = A\tanh\{B(x-vt-x_0)\}\operatorname{sech}\{B(x-vt-x_0)\} \\ \qquad\qquad \cdot\exp\left\{i\left(\dfrac{1}{2}vx - \Omega t - \theta\right)\right\}, \\ n_{ls}(x,t) = 6\lambda\operatorname{sech}^2\{B(x-vt-x_0)\}, \end{cases} \tag{2.75}$$

其中 $A^2 = 48\lambda^2\delta$，$\lambda = \Omega - \dfrac{v^2}{4}$，$v^2 < 1$.

如果在方程组(2.58)、(2.59)中，色散项 $v_e^2\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}$ 换成 $c^2\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}$，即有

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2}-c_s^2\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\overline{E}^2}{8\pi M}, \tag{2.76}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}=-w_p^2\left(1+\frac{n}{n_0}\right)E, \tag{2.77}$$

则可得到光孤立子. 事实上，令 $E(x,\ t)=\varepsilon(x,\ t)e^{-iw_p t}+c.c$，并忽略含 $\varepsilon_{tt}(x,\ t)$ 的项，得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 n}{\partial t^2}-c_s^2\dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\dfrac{|\varepsilon|^2}{8\pi M}, & (2.78)\\ -2iw_p\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t}-c^2\dfrac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}=-w_p^2\dfrac{n}{n_0}\varepsilon. & (2.79)\end{cases}$$

它和萨哈罗夫方程的差别，仅仅在于把 v_e^2 换成 c^2. 因而光孤立子的宽度要比朗缪尔孤立子的宽度宽 c/v_e 倍.

§3 朗道-利弗席茨方程和磁化运动

1935年，朗道(L. D. Landau)和利弗席茨(E. M. Lifshitz)在研究磁畴壁运动时，提出了磁化运动方程组

$$\frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial t}=\lambda_1\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{H}^l-\lambda_2\boldsymbol{z}\times(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{H}^l), \tag{3.1}$$

其中 λ_1、λ_2 是物理常数，$\lambda_2\geqslant 0$；$\boldsymbol{z}(x,\ t)=(z_1(x,\ t),\ z_2(x,\ t),\ z_3(x,\ t))$ 是三维向量值函数，它表示磁化强度；"×"表示 $\mathbb{R}^3$ 中向量的叉积；$\boldsymbol{H}^l$ 表示有效磁化强度，当存在电磁场的情况下，

$$\boldsymbol{H}^l=\Delta\boldsymbol{z}+\boldsymbol{H}, \tag{3.2}$$

其中 $\boldsymbol{H}(x,\ t)$ 表示磁场强度，它和麦克斯韦方程组耦合：

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}, \tag{3.3}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{H}+4\pi\boldsymbol{z}), \tag{3.4}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{H}+4\pi\boldsymbol{z})=0,\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{E}=0,\tag{3.5}$$

$$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}.\tag{3.6}$$

在不考虑电磁场的情况下，朗道-利弗席茨方程组可写为

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\lambda_1\boldsymbol{z}\times\Delta\boldsymbol{z}-\lambda_2\boldsymbol{z}\times(\boldsymbol{z}\times\Delta\boldsymbol{z}),\tag{3.7}$$

其中第一项表示磁化强度 $\boldsymbol{z}$ 绕有效磁场 $\boldsymbol{H}^e$ 的运动，第二项表示吉伯(W. Gilbert)耗散项．这个方程组是铁磁介质中的重要运动方程组，最近十多年中引起许多物理学家和数学家的重视．1979 年拉克希玛南 (M. Lakshmanan) 等研究了无外加磁场、无耗散的一维朗道-利弗席茨方程组

$$\boldsymbol{z}_t=\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{z}_{xx}\tag{3.8}$$

的孤立子解，他们得到了具有形式 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}(x-ct)$ 的旋波解

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{a}\cos\alpha+\{\boldsymbol{b}\cos(kx-wt)+\boldsymbol{c}\sin(kx-wt)\}\sin\alpha,\tag{3.9}$$

其中 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中相互垂直的单位常向量，常数 α、k 任意，$w=k^2\cos\alpha$.

对方程组(3.8)作极坐标变换

$$\begin{cases}u=\sin\theta\cos\varphi,\\ v=\sin\theta\sin\varphi,\\ w=\cos\theta,\end{cases}\tag{3.10}$$

其中 $\boldsymbol{z}=(u,\ v,\ w)$，$|\boldsymbol{z}|=1$．由此，方程组(3.8)为

$$\begin{aligned}&\theta_t=-2\theta_x\varphi_x\cos\theta-\varphi_{xx}\sin\theta,\\ &\varphi_t\sin\theta=\theta_{xx}-(\varphi_x)^2\sin\theta\cos\theta.\end{aligned}\tag{3.11}$$

他们从(3.11)出发，得到了特殊的孤立波解

$$\begin{cases}\cos\theta=\left[\tanh\left(\dfrac{1}{2}c(x-ct)\right)\right]^2,\\ \varphi=\tan^{-1}\left[\tanh\left(\dfrac{1}{2}c(x-ct)\right)\right]^2+\dfrac{1}{2}cx,\end{cases}\tag{3.12}$$

其中 c 为常数波速．中村(K. Nakamuka)、佐翁(J. Tjon)、福格迪(H. O. Fogedby)等先后研究了带外磁场的朗道-利弗席茨方程组

$$z_t = z \times z_{xx} + z \times h, \tag{3.13}$$

其中常向量 $h=(0, 0, h)$, $h\neq 0$, 得到了方程组(3.13)具形式 $z=z(x-ct)$ 的旋波解

$$z=(\sqrt{1-s_0^2}\cos\xi,\ \sqrt{1-s_0^2}\sin\xi,\ s_0), \tag{3.14}$$

其中 $\xi=kx-wt+\varphi$, s_0、h、w、φ 均为常数.

对方程组(3.13)作极坐标变换(3.10), 可得到(3.13)的孤立子解

$$\cos\theta = 1 - A\cos h^{-2}\left(\frac{x-ct-x_0}{\Gamma}\right),$$

$$\varphi=\varphi_0+\frac{1}{2}c(x-ct-x_0)+\tan^{-1}\left(\frac{2}{c\Gamma}\ \tanh\left(\frac{x-ct-x_0}{\Gamma}\right)\right),$$

其中常数 x_0、φ_0 由初值决定, 常数 A、Γ 满足关系式

$$A=2-\frac{c^2}{2h}, \qquad \Gamma=\left(h-\left(\frac{c}{2}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.15}$$

塔赫塔忠(L. A. Takhtajon)、福格迪(H. C. Fogedby)等人用散射反演法研究了方程组(3.13)的孤立子解, 塔赫塔忠得到方程组(3.13)的 N 孤立子解, 萨哈罗夫证明了朗道-利弗席茨方程(3.8)与非线性薛定谔方程的规范等价性; 此后, 对朗道-利弗席茨方程组的可积性、无穷守恒律、哈密顿结果, 特别是与非线性薛定谔方程的关系作了一系列有意义的研究工作.

从偏微分方程的研究角度, 朗道-利弗席茨方程也是令人感兴趣的. 方程组(3.8)改写为

$$z_t=\mathscr{A}(z)z_{xx}, \tag{3.16}$$

其中

$$z=\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}(z)=\begin{pmatrix} 0 & -w & v \\ w & 0 & -u \\ -v & u & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

不难验证系数矩阵 $\mathscr{A}(z)$ 具有如下性质

(i) 零定 即

$$\xi\cdot\mathscr{A}(z)\xi=0, \qquad \text{其中 } \xi, z\in\mathbb{R}^3.$$

(ii) 奇异 即

$$\det \mathscr{A}(z)=0, \qquad \text{其中 } z\in\mathbb{R}^3.$$

实际上，$\mathscr{A}(z)$为三阶辛矩阵. 因此，方程组(3.16)为强退化的、强耦合的拟线性抛物型方程组. 1982年以来，我们对朗道-利弗席茨方程组的各类定解问题(其中包括空间一维和高维的情况)进行了比较系统的研究.

§4 布森内斯克方程和户田晶格，布恩-英菲尔德方程

费米(E. Femi)等人考察具有相等质量的64个质点以非线性弹簧相联的力学系统. 分别考察运动方程组

$$\begin{cases} \ddot{x}_i=(x_{i+1}+x_{i-1}-2x_i)+\alpha[(x_{i+1}-x_i)^2-(x_i-x_{i-1})^2], \\ \ddot{x}_i=(x_{i+1}+x_{i-1}-2x_i)+\beta[(x_{i+1}-x_i)^3-(x_i-x_{i-1})^3], \\ \ddot{x}_i=\delta_1(x_{i+1}-x_i)-\delta_2(x_i-x_{i-1})+c, \end{cases} \tag{4.1}$$

式中 $i=1, 2, \cdots, 64$. 具有周期初值条件

$$x_i(0)=\sin\frac{i\pi}{64}, \qquad \dot{x}_i(0)=0, \tag{4.2}$$

其中 $x_i(t)$表示第 i 个质点距平衡态的位移，α, β, δ_1, δ_2 和 c 是某些确定常数. 他们将各种能量分配，令

$$a_k=\sum_i x_i\sin\frac{ik\pi}{64}, \tag{4.3}$$

则能量

$$\begin{cases} E_{x_i}^{\rm kin}+E_{x_i}^{\rm pot}=\dfrac{1}{2}\dot{x}_i^2+\dfrac{(x_{i+1}-x_i)^2+(x_i-x_{i-1})^2}{2}, \\ E_{a_k}^{\rm kin}+E_{a_k}^{\rm pot}=\dfrac{1}{2}\dot{a}_k^2+2a_k^2\sin\dfrac{k\pi}{128}. \end{cases} \tag{4.4}$$

经典统计力学认为，任何微弱的非线性作用必将导致能量的平衡，但实际计算结果却使人大吃一惊，它并不趋于热化. 当时费米只

在频率空间来考察，未能发现孤立子解. 后来，户田(M. Toda)考察晶格的非线性振动，近似模拟这种情况，得到了孤立子解，使费米问题得到了正确的解答. 我们把晶体看成具有质量的弹簧拉成的链条，如以 $r_n(t)$ 表示第 n 个弹簧关于它的平衡位置的偏离，则可得常微分差分方程组(运动方程组)

$$m\ddot{r}_n = 2f(r_n) - f(r_{n+1}) - f(r_{n-1}), \tag{4.5}$$

其中 $n=0, \pm1, \pm2, \cdots$; $f(r)$ 表示弹簧的作用力；户田假设 $f(r) = -\alpha(1-e^{-\beta r})$，当 $f(r)$ 为线性函数时，如 $f(r)=-\gamma r$，则有

$$m\ddot{r}_n = \gamma(r_{n+1}+r_{n-1}-2r_n). \tag{4.6}$$

设其行波解为

$$r_n = a\cos\theta, \qquad \theta = wt - pn,$$

代入(4.6)，可得色散关系

$$\frac{mw^2}{\gamma} = 4\sin^2\frac{p}{2}.$$

对于非线性情况，户田的解法是：令 $\dot{s}_n = f(r_n)$，于是(4.5)化为等价方程组

$$\dot{s}_n = f(r_n), \qquad m\dot{r}_n = 2s_n - s_{n+1} - s_{n-1}.$$

因为

$$f(r) = -\alpha(1-e^{-\beta r}),$$

$$\ddot{s}_n = f'(r_n)\dot{r}_n = -\alpha\beta e^{-\beta r_n}\dot{r}_n = -\beta(\alpha+\dot{s}_n)\dot{r}_n,$$

故有

$$\frac{m}{\beta}\frac{\ddot{s}_n}{\alpha+\dot{s}_n} = s_{n+1}+s_{n-1}-2s_n. \tag{4.7}$$

考虑(4.7)的行波解

$$s_n = s(\theta), \qquad \theta = wt - pn, \tag{4.8}$$

则 $s(\theta)$ 满足常微分差分方程

$$\frac{mw^2}{\beta}\cdot\frac{s''}{\alpha+ws'} = s(\theta+p)+s(\theta-p)-2s(\theta). \tag{4.9}$$

由等式

$$d_n^2(\theta+p)-d_n^2(\theta-p)=-2k^2\frac{d}{dp}\left(\frac{\rho_n(\theta)c_n(\theta)\rho_n^2(\theta)}{1-k^2\rho_n^2(\theta)}\right),$$

其中c_n、ρ_n、d_n是雅可比椭圆函数，k是这些函数的模.令

$$E(\xi)=\int_0^\xi d_n^2(z)dz,$$

(4.9)对p积分，有

$$E(\theta+p)-E(\theta-p)-2E(0)=\frac{E''(0)}{q+E'(0)},\quad q=\frac{1}{\rho_n^2p}-1,$$

故得s_n的解

$$s_n=s(\theta)=bz(2k\theta),$$

其中$z(\theta)=E(0)-\theta\dfrac{E(k)}{k}$，它是具有周期$2k$的雅可比$\zeta$函数.

$$b=\left(\frac{m\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\rho_n^2 2k_p}-1+\frac{E}{k}\right)^{-\frac{1}{2}},\qquad \theta=wt-pn,$$

$$w=\frac{1}{2k}\left(\frac{\alpha\beta}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\rho_n^2 2k_p}-1+\frac{E}{k}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

当$k\to 0$时，

$$s_n=\frac{bk^2}{4}\sin 2\pi\theta\qquad(\text{线性情况}),$$

当$k\to 1$时，

$$s_n=\frac{1}{4}\frac{m}{\alpha\beta}(\bar{b})^2\operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}(k_n-\bar{b}t)+\delta\right],\qquad(4.10)$$

其中$\bar{b}=\dfrac{4\alpha\beta}{m}\operatorname{sech}^2\dfrac{k}{2}$，$\delta$为参数．于是得到孤立子解(4.10)．

对于微分差分方程(4.5)，如果对差分取极限，则可得到如下形式的布森内斯克方程

$$u_{tt}-u_{xx}+\lambda_1(u^2)_{xx}+\lambda_2u_{xxxx}=0,\qquad(4.11)$$

其中λ_1、λ_2为实常数.在长波长、小振幅的近似下，可得KdV方程

$$u_t+uu_x+\mu u_{xxx}=0,\qquad(4.12)$$

其中μ为实常数.

波恩(M. Born)和英菲尔德(M. L. Infeld)曾在非线性修正

麦克斯韦方程时，得到方程(波恩-英菲尔德方程)

$$(1-\varphi_t^2)\varphi_{xx}+2\varphi_x\varphi_t\varphi_{xt}-(1+\varphi_x^2)\varphi_{tt}=0. \qquad (4.13)$$

对于此方程，Barbaskov 和 Chernikov 在 1966 年得到它的孤立子解．当 $1+\varphi_x^2-\varphi_t^2>0$ 时，易知(4.13)为双曲型方程，令 $\xi=x-t$, $\eta=x+t$, $u=\varphi_\xi$, $v=\varphi_\eta$, 则由(4.13)可得等价方程组



$$\begin{cases} u_\eta-v_\xi=0, \\ v^2u_\xi-(1+2uv)u_\eta+u^2v_\eta=0. \end{cases} \qquad (4.14)$$

设 $J=\dfrac{\partial(u,\ v)}{\partial(\xi,\ \eta)}\neq0$, 则 $u_\xi=J\eta_v$, $u_\eta=-J\xi_v$, $v_\xi=-J\eta_u$, $v_\eta=J\xi_u$.

于是，由(4.14)可得

$$\begin{cases} \xi_v-\eta_u=0, \\ v^2\eta_v+(1+2uv)\xi_v+u^2\xi_u=0. \end{cases} \qquad (4.15)$$

由此可得

$$u^2\xi_{uu}+(1+2uv)\xi_{uv}+v^2\xi_{vv}+2u\xi_u+2v\xi_v=0. \qquad (4.16)$$

(4.16)的特征方程为

$$u^2dv^2-(1+2uv)du\,dv+v^2du^2=0.$$

令 $r=\dfrac{\sqrt{1+4uv}-1}{2v}$, $s=\dfrac{\sqrt{1-4uv}-1}{2u}$, $(u,\ v)\to(r,\ s)$, 得

$$r^2\xi_r+\eta_r=0, \qquad \xi_s+s^2\eta_s=0. \qquad (4.17)$$

(4.17)消去 η, 得

$$\xi_{rs}=0, \qquad (4.18)$$

(4.18)的一般解为

$$x-t=\xi=F(r)-\int s^2G'(s)ds, \qquad (4.19)$$

$$x+t=\eta=G(s)-\int r^2F'(r)dr, \qquad (4.20)$$

其中 $F(r)$、$G(s)$为任意函数．因

$$\varphi_r=u\xi_r+v\eta_r=\frac{r}{1-rs}\xi_r+\frac{s}{1-rs}\eta_r=rF'(r),$$

故可得
$$\varphi=\int rF'(r)dr+\int sG'(s)ds.$$

令 $F(r)=\rho$、$G(s)=\sigma$，且设 $r=\Phi_1'(\rho)$、$s=\Phi_2'(\sigma)$，则有

$$\varphi=\Phi_1(\rho)+\Phi_2(\sigma).$$

由(4.19)、(4.20)，可得

$$x-t=\rho-\int_{-\infty}^{\sigma}[\Phi_2'(\sigma)]^2 d\sigma, \qquad x+t=\sigma-\int_{\rho}^{+\infty}[\Phi_1'(\rho)]^2 d\rho.$$

设 $\Phi_1(\rho)$、$\Phi_2(\sigma)$为局部的，且分别在 $-1<\rho<0$，$0<\sigma<1$ 不为 0，

$$\varphi=\Phi_1(x-t)+\Phi_2(x+t), \quad t<0, \tag{4.21}$$

Φ_1 波从 $x=-\infty$ 进入，Φ_2 波从 $x=+\infty$ 进入，则当 $t\to\infty$ 时，有

$$\varphi=\Phi_1\left(x-t+\int_{-\infty}^{\infty}(\Phi_2'(\sigma))^2 d\sigma\right)$$

$$+\Phi_2\left(x+t-\int_{-\infty}^{\infty}[\Phi_1'(\rho)]^2 d\rho\right). \tag{4.22}$$

§5 二维 K—P 方程

1970 年，卡多姆采夫(B. B. Kadomfsov)和佩特维亚什维利(V. I. Pefrishvili)提出二维的 KdV 方程，即考虑 KdV 方程在另一个空间变元 y 方向的小扰动，即加上小的扰动项 $\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}$，并考虑色散关系，有

$$u_t+uu_x+u_{xxx}=\varphi_y, \tag{5.1}$$

$$\varphi_x=\mp\frac{c}{2}\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{5.2}$$

其中“∓”分别表示负、正色散，c 为扰动波的传播速度．由(5.1)对 x 微商，(5.2)对 y 微商，消去 φ_{xy}，即得

$$(u_t+uu_x+u_{xxx})_x\pm\frac{c}{2}u_{yy}=0, \tag{5.3}$$

此即 K-P 方程．显然，若 u 不依赖于 y 时，它实质上是 KdV 方程，若 u 不依赖于 t 时，将 y 改写为 t，它实质上是布森内斯克方程．

考虑非线性方程组

$$\begin{cases} \Phi_x = M\Phi + A\Phi_y, \\ \Phi_t = N\Phi + B\Phi_y + C\Phi_{yy}, \end{cases} \tag{5.4}$$

其中

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k-u & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\,w_y + u_x & -(2u+4\lambda) \\ -(2u+4\lambda)(\lambda-u) + u_{xx} - \frac{1}{\sqrt{3}}u_y & \sqrt{3}\,w_y - u_x - 2f \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

$$w = \int u\,dx,$$

它的可积条件 $\Phi_{xt} = \Phi_{tx}$ 就是 K–P 方程.

设 $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}$ 是(5.4)的一个列向量解, $\sigma = \frac{\Phi_2}{\Phi_1}$, 那么 σ 满足

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda - u - \sigma^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\int \sigma_y\,dx, \\ \sigma_t = -(2u+4\lambda)(\lambda-u-\sigma^2) - \frac{1}{\sqrt{3}}\int \sigma_y\,dx \\ \qquad + \frac{4}{\sqrt{3}}(\lambda-u)\int \sigma_y dx - \frac{1}{\sqrt{3}}u_y - 2u_x\varphi \\ \qquad - \frac{4}{3}\left(\left(\int \sigma_y\,dx\right)^2 + \int \sigma_{yy}\,dx\right) - \frac{4}{\sqrt{3}}\left(\sigma_y + \sigma\int \sigma_y\,dx\right)\sigma. \end{cases} \tag{5.6}$$

由此, 通过计算, 可以证明

$$\tilde{u} = u + 2\sigma_x$$

是 K–P 方程的一个贝克隆(A. V. Bäcklund)变换, 即 $\tilde{u}$ 仍然满足 K–P 方程.

运用广田(R. Hirota)方法, 即利用 D 算子

$$D_t^n D_x^m a(x, t) b(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right)^n \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^m a(x, t) b(x', t')\Big|_{\substack{t=t' \\ x=x'}}$$

及其性质，可将 K-P 方程化为如下形式

$$(D_tD_x+D_y^2+D_x^4)f\cdot f=0, \tag{5.7}$$

其中 $u=2(\log f)_{xx}$. 由此可得 u 的 N 孤立子解为

$N=3$,

$$\begin{aligned} f=&1+\exp(\eta_1)+\exp(\eta_2)+\exp(\eta_3)\\ &+\exp(A_{12}+\eta_1+\eta_2)+\exp(A_{13}+\eta_1+\eta_3)\\ &+\exp(A_{23}+\eta_2+\eta_3)\\ &+\exp(A_{12}+A_{13}+A_{23}+\eta_1+\eta_2+\eta_3), \end{aligned} \tag{5.8}$$

其中

$$\eta_i=p_ix+q_iy-\Omega_it, \qquad p_i\Omega_i-p_i^4+q_i^2=0, \tag{5.9}$$

和

$$\begin{aligned} \exp(A_{ij})&=-\frac{(p_i-p_j)(\Omega_i-\Omega_j)-(p_i-p_j)^4+(q_i-q_j)^2}{(p_i+p_j)(\Omega_i+\Omega_j)-(p_i+p_j)^4+(q_i+q_j)^2}\\ &=\frac{3(p_i-p_j)^2+[(q_i/p_i)-(q_j/p_j)]^2}{3(p_i+p_j)^2+[(q_i/p_i)-(q_j/p_j)]^2}, \end{aligned} \tag{5.10}$$

其中 $i,j=1, 2, 3$, p_i 和 q_i 均为任意常数。

N 孤立子解具有形式：

$$u=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log f,$$

$$f=\sum_{\mu=0,1}\exp\left(\sum_{i>j}^{(N)}A_{ij}\mu_i\mu_j+\sum_{i=1}^{N}\eta_i\mu_i\right). \tag{5.11}$$

第2章

某些非线性演化方程的定性研究

最近几年来，随着孤立子问题及其理论的发展，一大批具有孤立子解的非线性演化方程日益引起人们的注意．例如：KdV方程、非线性薛定谔方程、非线性克莱茵-戈登方程、萨哈罗夫方程、朗道-利弗席茨方程、本杰明-小野方程等．这些方程属于可积或近于可积系统，除了具有孤立子这个重要特征之外，还具有其他明显的物理特征：色散性和非线性的统一；具有一定的波动性，但它的解又具有一定的光滑性；$t\to\infty$（或$x\to\infty$）时解的某种衰减性，散射性．而且，最近人们发现，解的衰减和解的光滑性是紧密相关的．由于这些方程和物理的最新研究紧密相关，对于它的解法和性质的理论研究早已超出了传统的研究方法．例如，出现了散射反演这个崭新的、精确的、十分重要的求解方法，并为微分方程的理论研究开辟了新的途径；贝克隆变换的求特解方法以及用微分几何外微分形式和李群建立起来的延长结构法等．同时，就这类非线性偏微分方程本身理论研究而言，已不能照搬过去一些传统的做法．例如，对于KdV方程、非线性薛定谔方程等，它们的解虽然具有比较好的光滑性，但不存在极值原理．因此，必须采用积分估计方法．但这种积分估计不同往常的是必须充分利用方程的多种形式的守恒律．即建立耦合解的先验估计、积分不等式．正如拉克斯（P. D. Lax）指出："对于KdV方程，它的主要特征是具有无穷多个守恒律"．目前对这类方程的定性研究，主要集中在：在弱的条件下整体解的存在性和唯一性；当$t\to\infty$时解的衰减阶数的精确估计；当$t>0$时解的部分正则性以及在一定条件下解依各种范数的破裂性（blow up），第3章将列举几类非线性演化方程的最新研究成果．

本章以几个典型方程为例，比较简捷地介绍上述研究内容的典型方法，藉以了解当前研究这些问题的范围和深度，并掌握其中的主要方法。

§6 非线性薛定谔方程初边值问题的光滑解

我们考虑如下非线性薛定谔方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_t-\Delta u+f(|u|^2)u=0, & x\in\Omega,\ t>0, \quad (6.1)\\ u(x,\ 0)=u_0(x), & x\in\Omega, \quad (6.2)\\ u|_{\partial\Omega}=0, & t>0, \quad (6.3)\end{cases}$$

其中 Ω 为 $\mathbb{R}^2$ 中的有界域，具有光滑边界 $\partial\Omega$。设 f: $\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ 在 $(0,\ \infty)$ 上是 C^2 函数，且满足

$$0<f(s)\leqslant c_1 s^{\frac{p}{2}}, \qquad \forall s\in\mathbb{R}^+, \tag{6.4}$$

$$|f'(s)s^{\frac{1}{2}}|\leqslant c_2 s^{\frac{p-1}{2}}, \qquad \forall s\in\mathbb{R}^+, \tag{6.5}$$

$$|f''(s)s|\leqslant c_3 s^{\frac{p-2}{2}}, \qquad \forall s\in\mathbb{R}^+, \tag{6.6}$$

其中 $p\in[1,\ \infty)$，c_i 是正常数 $(i=1,\ 2,\ 3)$。我们将证明，当 $p\in[2,\ 3)$ 时可得到整体光滑解。当 $p=2$ 时已有布雷齐斯(H. Brezis)-加卢特(T. Gallouet)的结果。记 $\mathscr{X}$ 为函数空间

$$\mathscr{X}=\{u\,|\,u\in H^3(\Omega)\cap H_0^1(\Omega),\ \Delta u\in H_0^1(\Omega)\}.$$

定理1 设 $2\leqslant p<3$。对任意 $u_0\in\mathscr{X}$，存在问题(6.1)～(6.3)的唯一整体光滑解 $u(x,\ t)$，

$$u(x,\ t)\in L^\infty(0,\ T;\mathscr{X}), \qquad u_t(x,\ t)\in L^\infty(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)).$$

证明 我们可用伽辽金近似来构造我们的整体近似解。为证明这些近似解的收敛性，最关键的是要获得近似解的先验估计。为此，我们只要对问题(6.1)～(6.3)的解建立先验估计，因为对于伽辽金近似解的估计是相同的。

引理1 设 $u=u(x,\ t)$ 是问题(6.1)～(6.3)的光滑解，则

$$\int_\Omega |u(x, t)|^2 dx = \int_\Omega |u_0(x)|^2 dx, \tag{6.7}$$

$$\int_\Omega |\nabla u(x, t)|^2 dx + \int F(|u(x, t)|^2) dx$$
$$= \int_\Omega |\nabla u_0(x)|^2 dx + \int_\Omega F(|u_0(x)|^2) dx, \tag{6.8}$$

其中

$$F(s) = \int_0^s f(\sigma) d\sigma. \tag{6.9}$$

证明 (6.1)乘以$\bar{u}(x, t)$(即$u(x, t)$的复数共轭)，对$x \in \Omega$积分，再取虚部，即得(6.7)。(6.1)乘以$\bar{u}_t$，对$x \in \Omega$积分，再取实部，即得(6.8)。

由引理1推出：

$$\sup_{0 \le t < \infty} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)} \le c. \tag{6.10}$$

这里及以后，均用c表示各种正常数，它仅依赖于初值模。如有必要，它还依赖于正常数T。

引理2 我们有

$$\|u_t(t)\|^2 \le c\|\nabla u_t(t)\| + c. \tag{6.11}$$

证明 方程(6.1)乘以$\bar{u}_t$，取虚部，并在Ω上积分，得

$$\|u_t\|^2 - \mathrm{Im}(\Delta u, u_t) + \mathrm{Im}(f(|u|^2)u, u_t) = 0. \tag{6.12}$$

由此可知

$$\begin{aligned}\|u_t(t)\|^2 &\le \|\nabla u(t)\| \|\nabla u_t(t)\| + c\|u(t)\|^{p+1}_{L_{2(p+1)}} \|u_t(t)\| \\ &\le c\|\nabla u_t(t)\| + c\|u_t\| \\ &\le c\|\nabla u_t(t)\| + \frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2 + c,\end{aligned}$$

其中我们用到$L_{2(p+1)}(\Omega) \supset H^1(\Omega)$。由上式，即得(6.11)。

引理3 我们有

$$\frac{d}{dt}\Big[\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \int_\Omega \{f'(|u|^2)|u|^2 + f(|u|^2)\}|u_t|^2 dx$$
$$+ \int_\Omega f'(|u|^2)(u^2\bar{u}_t^2 + \bar{u}^2 u_t^2) dx$$

$$\leqslant c\int_{\Omega}|u|^{p-1}|u_t|^2 dx. \tag{6.13}$$

证明 (6.1)对 t 微商，乘以 $\bar{u}_{tt}$，分部积分，可得：

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|\nabla u_t|^2 dx+\int_{\Omega}\{(f(|u|^2)u)_t\bar{u}_{tt}+(f(|u|^2)\bar{u})_t u_{tt}\}dx=0,$$

其中

$$\begin{aligned}
&(f(|u|^2)u)_t+(f(|u|^2)\bar{u})_t u_{tt}\\
&=\{f'(|u|^2)|u|^2+f(|u|^2)\}(u_t\bar{u}_{tt}+\bar{u}_t u_{tt})\\
&\quad+f'(|u|^2)(u^2\bar{u}_t\bar{u}_{tt}+\bar{u}^2u_t u_{tt})\\
&=\{f'(|u|^2)|u|^2+f(|u|^2)\}\frac{d}{dt}|u_t|^2\\
&\quad+f'(|u|^2)u^2\frac{d}{dt}\bar{u}_t^2+f'(|u|^2)u^2\frac{d}{dt}u_t^2.
\end{aligned}$$

由此可得(6.13).

引理4 我们有

$$\int|u|^{p-1}|u_t|^2 dx\leqslant c(1+\sqrt{\log c(1+\|\nabla u_t\|^{\frac{1}{2}})})^{p-1}(\|\nabla u_t\|^2+1). \tag{6.14}$$

证明 利用二维空间的布雷齐斯-加卢特不等式

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant c\{1+\|u\|_{H^1(\Omega)}\sqrt{\log(1+\|u\|_{H^2(\Omega)})}\},$$

因此

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega}|u|^{p-1}|u_t|^2 dx&\leqslant\|u\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)}\int_{\Omega}|u_t|^2 dx\\
&\leqslant c\{1+\sqrt{\log(1+\|u\|_{H^2(\Omega)})}\}^{p-1}\int_{\Omega}|u_t|^2 dx.
\end{aligned} \tag{6.15}$$

由索伯列夫嵌入定理和引理2，有

$$\|u_t\|_{L^3(\Omega)}\leqslant c\|\nabla u_t\|^{\frac{1}{3}}\|u_t\|^{\frac{2}{3}}\leqslant c(\|\nabla u_t\|^{\frac{2}{3}}+1). \tag{6.16}$$

再利用方程(6.1)，有

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^2(\Omega)}&\leqslant c(\|\Delta u\|+\|u\|)\leqslant c(\|u_t\|+\||u|^{p-1}u\|+\|u\|)\\
&\leqslant c(\|\nabla u_t\|^{\frac{1}{2}}+1).
\end{aligned} \tag{6.17}$$

从(6.15)～(6.17)可得(6.14).

引理5 对任何$T>0$，我们有

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|\nabla u_t\|\leq c(T).$$

证明 由引理3和引理4，有

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega|\nabla u_t(x,t)|^2dx\\
&\quad+\int_\Omega\{f'(|u|^2)|u|^2+f'(|u|^2)\}|u_t|^2(x,t)dx\\
&\quad+\int_\Omega f'(|u|^2)(u^2\bar{u}_t^2+\bar{u}^2u_t^2)dx\\
&\leq\int_\Omega|\nabla u_t(x,0)|^2dx\\
&\quad+\int_\Omega\{f'(|u_0|^2)|u_0|^2+f(|u_0|^2)\}|u_t(x,0)|^2dx\\
&\quad+\int_\Omega f'(|u_0|^2)(u_0^2\bar{u}_t(x,0)^2+\bar{u}_0^2u_t(x,0)^2)dx\\
&\quad+c\int_0^t\{1+\sqrt{\log c(1+\|\nabla u_t(s)\|^{\frac{1}{2}})}\}^{p-1}(\|\nabla u_t(s)\|^2+1)ds.
\end{aligned}$$

利用方程(6.1),可得

$$\begin{aligned}
\int_\Omega|\nabla u_t(x,0)|^2dx&\leq\int_\Omega|\nabla\Delta u_0|^2dx\\
&\quad+\int_\Omega|\nabla(f(|u_0|^2)u_0)|^2dx\\
&\leq c(\|u_0\|_{H^3(\Omega)})
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\{f'(|u_0|^2)|u_0|^2+f(|u_0|^2)\}|u_t(x,0)|^2dx\\
&\leq c(\|u\|_{L^\infty(\Omega)})\|u_t\|^2\leq c(\|u_0\|_{H^3(\Omega)}),
\end{aligned}$$

其中$c(\cdot)$表示各种正常数,它仅依赖于括号中的量.

于是,有

$$\int_\Omega\{f'(|u|^2)|u|^2+f(|u|^2)\}|u_t|^2(x,t)dx$$

$$+\int_\Omega \{f'(|u|^2)(u^2\bar{u}_t^2+\bar{u}^2\bar{u}_t^2)\}dx$$

$$\leqslant c\int_\Omega |u|^p|u_t|^2dx$$

$$\leqslant c\left(\int_\Omega |u|^{3p}dx\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int |u_t|^3dx\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\leqslant c\|\nabla u_t\|^{\frac{4}{3}}+c\leqslant\frac{1}{2}\|\nabla u_t\|^2+c,$$

因此得到

$$\|\nabla u_t\|^2\leqslant c+c\int_0^t\left\{1+\sqrt{\log(1+\|\nabla u_t\|^{\frac{1}{2}})}\right\}^{p-1}(\|\nabla u_t(s)\|^3+1)ds,$$

因此，当 $0\leqslant\frac{p-1}{2}\leqslant 1$ 时有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\nabla u_t(t)\|^2\leqslant c(T),\qquad \forall T>0.$$

从方程(6.1)，得

$$\sup_{0<t\leqslant T}\|u(t)\|_{H^4(\Omega)}\leqslant c(T),$$

这就得到了我们要求的估计．定理证毕．

§7 广义朗道-利弗席茨方程初边值问题弱解的存在性

我们考虑如下的广义朗道-利弗席茨方程的初边值问题

$$\begin{cases} z_t=z\times z_{xx}+f(x,t,z), & 0<x<l,\ t>0, & (7.1)\\ z_x(0,t)=z_x(l,t)=0, & t\geqslant 0, & (7.2)\\ z(x,0)=z_0(x), & 0\leqslant x\leqslant l, & (7.3)\end{cases}$$

其中 $z=(u,v,w)$ 是一个三维向量值未知函数，$f(x,t,z)$ 是一个已知变元 x,t,z 的三维向量值函数．“×”表示二个三维向量的叉积，$z_0(x)$ 是一个三维向量值初始函数．方程组(7.1)可以看作强退化的拟线性的抛物型方程组．因此二阶导数的系数矩阵是辛

矩阵，它是零定的，它的行列式也是奇异的．我们用粘性消去法和勒雷-绍德尔不动点原理建立初边值问题 (7.1)～(7.3) 弱解的存在性．

§7.1 线性抛物型方程组的基本估计

我们考虑线性抛物型方程组的初边值问题

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_t-\boldsymbol{A}(x,t)\boldsymbol{u}_{xx}+\boldsymbol{B}(x,t)\boldsymbol{u}_x+\boldsymbol{C}(x,t)\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}(x,t), & (7.4)\\ \boldsymbol{u}_x(0,\ t)=\boldsymbol{u}_x(l,\ t)=0, & (7.5)\\ \boldsymbol{u}(x,\ 0)=\boldsymbol{u}_0(x), & (7.6)\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{u}(x,\ t)$和 $\boldsymbol{u}_0(x)$是两个 N 维向量值函数．

引理 1　假定线性抛物型方程组(7.4)与初值函数 $\boldsymbol{u}_0(x)$ 适合如下条件：

(1) $\boldsymbol{A}(x,\ t)$是在 $Q_T=\{0<x<l,\ 0<t\leqslant T\}$ 中正定的 $N\times N$ 矩阵；

(2) $\boldsymbol{A}(x,\ t)$，$\boldsymbol{B}(x,\ t)$和 $\boldsymbol{C}(x,\ t)$是有界可测的 $N\times N$ 矩阵；

(3) $\boldsymbol{f}(x,\ t)$是在 Q_T 中平方可积的 N 维向量值函数；

(4) $\boldsymbol{u}_0(x)\in W_2^1(0,\ l)$ 是适合边界条件的 N 维向量值函数，

则对于初边值问题(7.4)～(7.6)，存在一个唯一的向量值解

$$\boldsymbol{u}(x,\ t)\in L^\infty(0,\ T;\ W_2^1(0,\ l))\cap W_2^{(2,1)}(Q_T), \tag{7.7}$$

并且成立如下的估计

$$\sup_{0<t\leqslant T}\|\boldsymbol{u}(\cdot,\ t)\|_{W_2^1(0,l)}+\|\boldsymbol{u}_t\|_{L_2(Q_T)}+\|\boldsymbol{u}_{xx}\|_{L_2(Q_T)}$$
$$\leqslant k(\|\boldsymbol{u}_0\|_{W_2^1(0,l)}+\|\boldsymbol{f}\|_{L_2(Q_T)}), \tag{7.8}$$

其中常数 k 仅依赖于方程(7.4)中的系数 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 的模．

证明　分别作方程组 (7.4) 与向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{u}_{xx}$ 的数量积，可得

$$(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u}_t)-(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_{xx})+(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_x)+(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{f}),$$

$$(\boldsymbol{u}_{xx},\ \boldsymbol{u}_t)-(\boldsymbol{u}_{xx},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_{xx})+(\boldsymbol{u}_{xx},\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_x)+(\boldsymbol{u}_{xx},\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{u}_{xx},\ \boldsymbol{f}).$$

两式相减，因为

$$\int_0^l (\boldsymbol{u}_{xx}(x,\ t),\ \boldsymbol{u}_t(x,\ t))dx$$

$$=(\boldsymbol{u}_x(x,t),\ \boldsymbol{u}_t(x,t))\big|_{x=0}^{x=l}-\int_0^l(\boldsymbol{u}_x(x,\ t),\ \boldsymbol{u}_{xt}(x,\ t))dx,$$

利用边界条件(7.5)，可见上式右边的第一项为0. 因此有

$$\int_0^l(\boldsymbol{u}_{xx}(x,t),\ \boldsymbol{u}_t(x,t))dx=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}_x(x,\ t)\|^2_{L_2(0,l)}.$$

在矩形区域 $Q_\tau=\{0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant t\leqslant\tau\}$ 中作减法($0<\tau\leqslant T$)，对所得结果积分，有

$$\|\boldsymbol{u}(\cdot,t)\|^2_{W_2^1(0,l)}-\|\boldsymbol{u}_0\|^2_{W_2^1(0,l)}+2\iint\limits_{Q_\tau}(\boldsymbol{u}_{xx},\ A\boldsymbol{u}_{xx})dx\,dt$$

$$=2\iint\limits_{Q_\tau}(\boldsymbol{u}_{xx},\ B\boldsymbol{u}_x+C\boldsymbol{u}-\boldsymbol{f})dx\,dt$$

$$+2\iint\limits_{Q_\tau}(\boldsymbol{u},\ A\boldsymbol{u}_{xx}-B\boldsymbol{u}_x-C\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f})dx\,dt.$$

根据引理的条件，容易从上述等式推出(7.8). 以上初边值问题解的存在性，可以采用参数延拓法来求得，解的唯一性直接从(7.8)式而得到，这就证得了引理1的结论.

§7.2 旋方程组解的存在性

我们称具有小扩散项的方程组

$$\boldsymbol{z}_t=\varepsilon\boldsymbol{z}_{xx}+\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{z}_{xx}+\boldsymbol{f}(x,\ t,\ \boldsymbol{z}),\quad \varepsilon>0 \tag{7.9}$$

为旋方程组. 它显然是抛物型方程组. 现在我们对于拟线性抛物型方程组(7.9)来考虑初边值问题(7.2)、(7.3).

取三维向量值函数空间 $\mathscr{B}=L_\infty(Q_T)$ 作为不动点的基空间，我们定义基空间到自身的带参数 $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 的泛函映射 T_λ: $\mathscr{B}\to\mathscr{B}$ 如下：对于每个 $\boldsymbol{u}\in\mathscr{B}$，象 $\boldsymbol{z}=T_\lambda(\boldsymbol{u})$ 是线性抛物型方程组

$$\boldsymbol{z}_t=\varepsilon\boldsymbol{z}_{xx}+\lambda\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{z}_{xx}+\boldsymbol{f}(x,\ t,\ \boldsymbol{u}) \tag{7.10}$$

初边值问题(3.2)、(3.3)的三维向量值的解，其中 $0\leqslant\lambda\leqslant1$. 由引理1. $\boldsymbol{z}=T_\lambda(\boldsymbol{u})$ 由初边值问题(7.10)、(7.2)、(7.3)所唯一决定，

而且属于向量函数空间 $\mathscr{G}$：

$$\mathscr{G}=L_\infty(0,\ T;\ W_2^1(0,\ l))\cap W_2^{(2,1)}(Q_T).$$

很明显，对于每个 λ，泛函算子 T_λ 是完全连续的；而且，对于基空间 $\mathscr{B}$ 的任意有界集 M，算子 T_λ 对 $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 是一致连续的。

为了利用不动点原理来证明一般旋方程组(7.10)初边值问题三维向量值广义整体解的存在性，我们要对映射 T_λ 所有可能的不动点作出参数 $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 一致的先验估计。

为了这一目标，我们作如下的假设：

(i) 三维向量值函数 $\boldsymbol{f}(x,\ t,\ \boldsymbol{z})$ 是对 x 和 $\boldsymbol{z}$ 连续可微的，3×3 雅可比导数矩阵 $\boldsymbol{f}_z(x,\ t,\ \boldsymbol{z})$ 是半有界的，即存在常数 b，对任意三维向量 $\xi\in\mathbb{R}^3$，成立着不等式

$$\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{f}_z(x,\ t,\ \boldsymbol{z})\boldsymbol{\xi}\leqslant b|\boldsymbol{\xi}|^2,$$

其中 $(x,\ t,\ \boldsymbol{z})\in Q_T\times\mathbb{R}^3$。此外，$\boldsymbol{f}_0(x,\ t)=\boldsymbol{f}(x,\ t,\ 0)\in L_2(Q_T)$。

(ii) 三维向量值函数 $\boldsymbol{z}_0(x)\in W_2^1(0,\ l)$ 适合边界条件。

(iii) 对于 $(x,\ t,\ \boldsymbol{z})\in Q_T\times\mathbb{R}^3$，有不等式

$$|\boldsymbol{f}_x(x,\ t,\ \boldsymbol{z})|\leqslant C(x,\ t)|\boldsymbol{z}|^3+d(x,\ t), \tag{7.11}$$

其中 $C(x,\ t)\in L_\infty(Q_T)$，$d(x,\ t)\in L_2(Q_T)$。

作向量方程

$$\boldsymbol{z}_t=\varepsilon\boldsymbol{z}_{xx}+\lambda\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{z}_{xx}+\lambda\boldsymbol{f}(x,\ t,\ \boldsymbol{z}) \tag{7.12}$$

与向量 $\boldsymbol{z}(x,\ t)$ 的数量积，我们得到

$$\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{z}_t=\varepsilon\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{z}_{xx}+\lambda\boldsymbol{z}\cdot(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{z}_{xx})+\lambda\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{f}(x,\ t,\ \boldsymbol{z}). \tag{7.13}$$

从假设(i)，我们有

$$\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{f}(x,\ t,\ \boldsymbol{z})=\boldsymbol{z}\cdot\left(\int_0^1\boldsymbol{f}_z(x,\ t,\ \tau\boldsymbol{z})d\tau\right)\boldsymbol{z}+\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{f}_0(x,\ t)$$

$$\leqslant(b+\delta)|\boldsymbol{z}|^2+\frac{1}{4\delta}|\boldsymbol{f}_0(x,\ t)|^2,$$

其中 $\delta>0$，在矩形区域 $Q_\tau(0<\tau\leqslant T)$ 上作(7.13)式的积分，得到

$$\|\boldsymbol{z}(\cdot,t)\|^2_{L_2(0,l)}-\|\boldsymbol{z}_0(x)\|^2_{L_2(0,l)}$$

$$\leqslant2\lambda(b+\delta)\int_0^\tau\|\boldsymbol{z}(\cdot,\ t)\|^2_{L_2(0,l)}dt+\frac{\lambda}{2\delta}\|\boldsymbol{f}_0\|^2_{L_2(Q_\tau)},$$

因此成立着估计

$$\|\boldsymbol{z}(\cdot,\ t)\|^2_{L_2(0,l)}\leqslant\left(\|z_0\|^2_{L_2(0,l)}+\frac{\lambda}{2\delta}\|f_0\|^2_{L_2(Q_T)}\right)e^{2\lambda(b+\delta)t},\tag{7.14}$$

其中 $0\leqslant\lambda\leqslant1$, $0\leqslant t\leqslant T$, $\delta>0$. 于是

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{z}(\cdot,\ t)\|_{L_2(0,l)}\leqslant k_1,\tag{7.15}$$

其中 k_1 是不依赖于 ε、λ 与 t 的常数.

现在作 $\boldsymbol{z}_{xx}(x,\ t)$ 与方程(7.13)的数量积, 有等式

$$\boldsymbol{z}_{xx}\cdot\boldsymbol{z}_t=\varepsilon\boldsymbol{z}_{xx}\cdot\boldsymbol{z}_{xx}+\lambda\boldsymbol{z}_{xx}\cdot(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{z}_{xx})+\lambda\boldsymbol{z}_{xx}\cdot\boldsymbol{f}(x,\ t,\ \boldsymbol{z}).\tag{7.16}$$

对于(7.16)式的左边, 有

$$\begin{aligned}\int_0^l(\boldsymbol{z}_{xx}\cdot\boldsymbol{z}_t)dx&=\boldsymbol{z}_x(l,\ t)\boldsymbol{z}_t(l,\ x)-\boldsymbol{z}_x(0,\ x)\cdot\boldsymbol{z}_t(0,\ t)\\&\quad-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{z}_x(\cdot,\ t)\|^2_{L_2(0,l)}\\&=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{z}_x(\cdot,\ t)\|^2_{L_2(0,l)},\end{aligned}\tag{7.17}$$

对于(7.16)式右边的最后项

$$\begin{aligned}&\int_0^l(\boldsymbol{z}_{xx}\cdot\boldsymbol{f}(x,\ t,\ \boldsymbol{z}))dx\\&=\boldsymbol{z}_x(l,\ t)\cdot\boldsymbol{f}(l,\ t,\ \boldsymbol{z}(l,\ t))-\boldsymbol{z}_x(0,\ t)\cdot\boldsymbol{f}(0,\ t,\ \boldsymbol{z}(0,\ t))\\&\quad-\int_0^l(\boldsymbol{z}_x\cdot D_x\boldsymbol{f})dx=-\int_0^l(\boldsymbol{z}_x\cdot D_x\boldsymbol{f})dx.\end{aligned}\tag{7.18}$$

由假设(i), 有

$$\begin{aligned}\iint_{Q_T}(\boldsymbol{z}_x\cdot D_x\boldsymbol{f})dx\,dt&=\iint_{Q_T}(\boldsymbol{z}_x\cdot\boldsymbol{f}_z(x,\ t,\ \boldsymbol{z})\boldsymbol{z}_x\,dx\,dt\\&\quad+\iint_{Q_T}\boldsymbol{z}_x\cdot\boldsymbol{f}_x(x,\ t,\ \boldsymbol{z})dx\,dt\end{aligned}$$

$$\leqslant\left(b+\frac{1}{2}\right)\int_0^\tau\|z_x(\cdot,\ t)\|^2_{L_2(0,l)}dt$$
$$+\frac{1}{2}\iint_{Q_\tau}|f_x(x,\ t,\ z)|^2dx\,dt,$$

由假设(ii)与内插公式

$$\frac{1}{2}\iint_{Q_\tau}|f_x|^2dx\,dt\leqslant\|C\|^2_{L_\infty(Q_T)}\iint_{Q_\tau}|z|^2dx\,dt+\|d\|^2_{L_2(Q_T)}$$

与

$$\int_0^l|z(x,\ t)|^6dx\leqslant c_1\|z(\cdot,\ t)\|^4_{L_2(0,l)}\|z(\cdot,\ t)\|^2_{W_2^1(0,l)},$$

这样,(7.18)式可换为不等式

$$\iint_{Q_\tau}(z_{xx}\cdot f(x,\ t,\ z))dx\,dt\leqslant c_2\int_0^\tau\|z_x(\cdot,\ t)\|^2_{L_2(0,l)}dt+c_3, \tag{7.19}$$

其中　$0<\tau\leqslant T$, $c_2=\left(b+\dfrac{1}{2}\right)+c_1\|C\|^2_{L_\infty(Q_T)}k_1^4$, $c_3=\|d\|^2_{L_2(Q_T)}$.

在矩形区域 Q_τ 上作(7.16)式的积分,可以得到估计

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|z_x(\cdot,\ t)\|_{L_2(0,l)}\leqslant k_2, \tag{7.20}$$

其中 k_2 不依赖于 λ、ε. 当范数 $\|C\|_{L_\infty(Q_T)}$ 与 $\|d\|_{L_2(Q_T)}$ 不依赖于 Q_T 的宽度 $l>0$ 时, k_2 也不依赖于 l.

因此有下面定理:

定理1　在条件(i)~(iii)成立时,旋方程组(7.9)的初边值问题(7.2)、(7.3)有唯一的三维向量值的广义整体解,

$$z(x,\ t)\in L_\infty(0,\ T;\ W_2^1(0,\ l))\cap W_2^{(2,1)}(Q_T).$$

当 $b<0$ 时, 可以取 $\delta>0$, 使得 $b+\delta<0$, 在 $T=\infty$ 的情况, 把条件(i)~(iii)分别记作(i_∞)、(ii_∞)、(iii_∞). 从(7.14)式,有如下定理:

定理2　在条件(i_∞)~(iii_∞)下, 如果 $b<0$, 则对于旋方程组(7.9)的初边值问题(7.2)、(7.3), 在定理1中所得到的广义整体解 $z(x,\ t)$对 x 的范数当 $t\to\infty$ 时趋于0, 即

$$\lim_{t\to\infty}\|z(\cdot,\ t)\|_{L_2(0,l)}=0. \tag{7.21}$$

§7.3 广义朗道-利弗席茨方程组初边值问题解的存在性

现在我们转向考虑广义朗道-利弗席茨方程组(7.1)的初边值问题(7.2)、(7.3). 在上面定理 1~2 的证明中, 可以看到近似解的先验估计是不依赖于 λ 的.

引理 2 定理 1 得到的解 $z_\varepsilon(x,\ t)$ 适合估计

$$\|z_\varepsilon(\cdot,\ t)\|_{L_2(0,l)}\leqslant k_3(\|z_0\|_{L_2(0,l)}+\|f_0\|_{L_2(0,l)})e^{(b+\delta)t} \tag{7.22}$$

与

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|z_\varepsilon(\cdot,\ t)\|_{W_2^1(0,l)}\leqslant k_4, \tag{7.23}$$

其中 $0\leqslant t\leqslant T$, $\delta>0$, k_3 和 k_4 不依赖于 ε; 当范数 $\|z_0\|_{W_2^1(0,l)}$、$\|f_0\|_{L_2(Q_T)}$、$\|C\|_{L_\infty(Q_T)}$ 与 $\|d\|_{L_2(Q_T)}$ 不依赖于矩形区域 Q_T 的宽度 $l>0$ 时, 也是不依赖于 $l>0$ 的.

引理 3 对定理 1 所得到的解 $z_\varepsilon(x,\ t)$, 成立估计

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|z_{\varepsilon t}(\cdot,\ t)\|_{H^{-1}(0,l)}\leqslant k_5, \tag{7.24}$$

其中 k_5 不依赖于 ε, 并且当 $\|z_0\|_{W_2^1(0,l)}$、$\|f\|_{L_2(Q_T)}$、$\|C\|_{L_\infty(Q_T)}$ 与 $\|d\|_{L_2(Q_T)}$ 不依赖于 $l>0$ 时, k_5 也不依赖于 l.

证明 对于任意的 $\psi(x)\in \mathring{H}^1(0,\ l)$, 我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^l \psi(x)z_{\varepsilon t}(x,\ t)dx\\ &=-\int_0^l \varepsilon\psi_x(x)z_{\varepsilon x}(x,\ t)dx\\ &\quad-\int_0^l \psi_x(x)[z_\varepsilon(x,\ t)\times z_{\varepsilon x}(x,\ t)]dx\\ &\quad+\int_0^l \psi(x)f(x,\ t,\ z_\varepsilon(x,\ t))dx.\end{aligned}$$

从(7.23), 有

$$\left|\int_0^l \psi(x) z_{\varepsilon t}(x,\ t)dx\right| \leqslant c_4\|\psi\|_{H^1(0,l)},$$

其中 c_4 不依赖于 ε 与 l. 根据负阶希尔伯特空间的定义，得到引理3.

引理 4 对于上述近似解，有估计

$$\|z_\varepsilon\|_{C^{0+\alpha,\alpha/2}(Q_T)} \leqslant (1+l)k_6, \tag{7.25}$$

其中 k_6 不依赖于 ε，并且在 $\|z_0\|_{W_2^1(0,l)}$、$\|f_0\|_{L_1(Q_T)}$、$\|C\|_{L_\infty(Q_T)}$ 与 $\|d\|_{L_1(Q_T)}$ 不依赖于 l 时，k_6 也不依赖于 l.

证明 设 $W_\varepsilon(t,\ x)=\int_0^x z_\varepsilon(\xi,\ t)d\xi$，则

$$W_{\varepsilon t}=\int_0^x z_{\varepsilon t}(\xi,\ t)d\xi, \qquad W_{\varepsilon xt}(x,\ t)=z_{\varepsilon t}(x,\ t),$$

$$W_{\varepsilon x}(x,\ t)=z_\varepsilon(x,\ t), \qquad W_{\varepsilon xx}(x,\ t)=z_{\varepsilon x}(x,\ t).$$

对于任意 $\psi(x)\in \mathring{H}_0^1(0,\ l)$，则有

$$\left|\int_0^l \psi'(x) W_{\varepsilon t}(x,\ t)dx\right| = \left|\int_0^l \psi(x) z_{\varepsilon t}(x,\ t)dx\right|$$

$$\leqslant c_4\|\psi\|_{H^1(0,l)} \leqslant c_4(1+l)\|\psi'(x)\|_{L_2(0,l)}.$$

由此即得

$$\sup_{0<t<T}\|W_{\varepsilon t}(\cdot,\ t)\|_{L_2(0,l)} \leqslant (1+l)k_5.$$

很明显地就有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|W_\varepsilon(\cdot,\ t)\|_{L_2(0,l)} \leqslant lk_4,$$

因此，对任意给定的 $l>0$，$\{W_\varepsilon(x,t)\}$ 在空间 $L_\infty(0,T;W_2^1(0,l))\cap W_\infty^1(0,\ T;\ L_2(0,\ l))$ 中对 $\varepsilon>0$ 一致有界. 这样，

$$\begin{aligned}
&|z_\varepsilon(x,\ t_2)-z_\varepsilon(x,\ t_1)|\\
&=|W_{\varepsilon x}(x,\ t_2)-W_{\varepsilon x}(x,\ t_1)|\\
&\leqslant c_5\|W_\varepsilon(\cdot,\ t_2)-W_\varepsilon(\cdot,\ t_1)\|_{L_2(0,l)}^{\frac{1}{4}}\\
&\quad\times\|W_\varepsilon(\cdot,\ t_2)-W_\varepsilon(\cdot,\ t_1)\|_{W_2^2(0,l)}^{\frac{3}{4}}
\end{aligned}$$

$$\leqslant c_6|t_2-t_1|^{\frac{1}{4}}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|W_t(\cdot,\ t)\|_{L_2(0,l)}^{\frac{1}{4}}$$

$$\times\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|W_x(\cdot,\ t)\|_{L_2(0,l)}^{\frac{3}{4}},$$

因此引理 4 成立.

现在考虑极限过程 $\varepsilon\to 0$. 对于广义朗道-利弗席茨方程组(7.1)的初边值问题(7.2)、(7.3), 可以定义"弱解"如下:

定义 1 三维向量值函数 $z(x,\ t)\in L_2(0,\ T;\ W_2^1(0,\ l))\cap C(Q_T)$ 称为广义朗道-利弗席茨方程(7.1)的初边值问题(7.2)、(7.3)的弱解, 如果对于任意试验函数 $\varphi(x)\in\Phi=\{\phi|\varphi\in C^1(Q_T),\ \varphi(x,\ T)=0\}$, 成立积分关系式

$$\iint_{Q_T}[\varphi_t z-\varphi_x(z\times z_x)+\varphi f(x,\ t,\ z)]dxdt$$

$$+\int_0^l\varphi(x,\ 0)z_0(x)dx=0. \tag{7.26}$$

对于近似解 $z_\varepsilon(x,\ t)$, 显然成立积分关系式

$$\iint_{Q_T}[\varphi_t z_\varepsilon-\varepsilon\varphi_x z_{\varepsilon x}-\varphi_x(z_\varepsilon\times z_{\varepsilon x})+\varphi_\varepsilon f(x,\ t,\ z_\varepsilon)]dxdt$$

$$+\int_0^l\varphi(x,\ 0)z_0(x)dx=0, \tag{7.27}$$

其中 $\varphi\in\Phi$. 从引理 2、引理 3 和引理 4 知, 初边值问题(7.9)、(7.2)、(7.3)的三维向量值近似解集 $\{z_\varepsilon(x,\ t)\}$ 在空间 $L_\infty(0,\ T;\ W_2^1(0,\ l))\cap C^{(\frac{1}{2},\frac{1}{4})}(Q_T)$ 中对 $\varepsilon>0$ 是一致有界的, 其中 l 为确定的常量. 我们可以从 $\{z_\varepsilon(x,\ t)\}$ 中选取一个子序列 $\{z_{\varepsilon_i}(x,\ t)\}$, 使得存在一个在 Q_T 上的三维向量值函数 $z(x,\ t)$, 并且 $\{z_{\varepsilon_i}(x,\ t)\}$ 在 Q_T 上一致收敛于 $z(x,\ t)$, 且 $\{f(x,\ t,z_{\varepsilon_i}(x,t))\}$ 在 Q_T 上一致收敛于 $f(x,\ t,\ z(x,\ t))$, $\{z_{\varepsilon_i x}(x,\ t)\}$ 弱收敛于 $z_x(x,t)$. 由此可见 $z(x,\ t)\in L_\infty(0,\ T;W_2^1(0,l))\cap C^{(\frac{1}{2},\frac{1}{4})}(Q_T)$.

为了验证(7.27), 第三项的收敛性, 我们估计

$$\iint_{Q_T} \varphi_x (z_{\varepsilon_i} \times z_{\varepsilon_i x}) dx\,dt - \iint_{Q_T} \varphi_x (z \times z_x) dx\,dt$$

$$= \iint_{Q_T} \varphi_x [(z_{\varepsilon_i} - z) \times z_{\varepsilon_i x}] dx\,dt$$

$$+ \iint_{Q_T} \varphi_x [z \times (z_{\varepsilon_i x} - z_x)] dx\,dt.$$

因为 $\{z_{\varepsilon_i x}(x, t)\}$ 弱收敛 $z_x(x, t)$，右边第二个积分趋于 0，对于第一个积分，当 $\varepsilon_i \to 0$ 时，

$$\iint_{Q_T} \varphi_x [(z_{\varepsilon_i} - z) \times z_{\varepsilon_i x}] dx\,dt \leqslant \|\varphi_x\|_{L_2(Q_T)} \|z_{\varepsilon_i} - z\|_{L_\infty(Q_T)} \to 0,$$

所以当 $\varepsilon_i \to 0$ 时，积分关系式(7.27)$_\varepsilon$ 趋于积分关系式(7.26)．这就说明了三维向量值极限函数 $z(x, t)$ 是广义朗道-利弗席茨方程初边值问题(7.2)、(7.3)的弱解．

定理 3 假定广义朗道-利弗席茨方程组(7.1)与向量值初始函数 $z_0(x)$ 适合条件(i)～(iii)，则初边值问题(7.1)、(7.2)、(7.3)至少有一个整体解

$$z(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^1(0, l)) \cap C^{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)}(Q_T).$$

定理 4 当 $b<0$ 与 $T=\infty$ 时，在定理 3 中所得到的三维向量值解 $z(x, t)$ 对 x 的范数，当 $t\to\infty$ 时趋于 0，即

$$\lim_{t\to\infty} \|z(\cdot, t)\|_{L_2(0, l)} = 0.$$

§8 广义 KdV 方程当 $t\to\infty$ 时解的渐近状态

考虑如下一般广义 KdV 方程的初值问题

$$u_t + f(u)_x + \delta(Hu)_x + \varepsilon Bu = 0, \quad x\in\mathbb{R},\ t>0, \tag{8.1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \qquad x\in\mathbb{R}, \tag{8.2}$$

其中 $B=D^s$，即为分数阶导数 s、$D^s u(x) = (2\pi)^{-1}\int |\xi|^s \hat{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$．$H$ 为微分算子，

$$Hu=\int p(\xi)\hat{u}(\xi)e^{ix\xi}d\xi, \tag{8.3}$$

其中符号 $p(\xi)$ 为正的偶函数，具有多项式增长．由此推出

$$\int (Hu)_x u\,dx=c\int i\xi p(\xi)|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi=0.$$

设 $f(0)=0$, $f'(0)=0$．分三种情况讨论：第一种，同时具有色散和耗散；第二种，广义的伯格斯方程；第三种，纯色散的广义 KdV 方程．

定理 1 $(\delta\neq 0,\ \varepsilon\neq 0)$

(i) 如果 $f(u)$ 满足条件

$$|f'(u)|\leqslant c(|u|^{p'}+1), \qquad p'<2(s-1), \quad s>1,$$

且 $u_0(x)\in H^s(\mathbb{R})$，则

$$\lim_{t\to\infty}|D^{\frac{s}{2}}u(t)|_2=\lim_{t\to\infty}|u(t)|_\infty=0. \tag{8.4}$$

(ii) 除满足上述(i)的条件外，且设 $f(u)\in C^{m+1}, m\in\mathbb{N}, s\geqslant 2$，且 $u_0(x)\in H^{\max(m+1,s)}(\mathbb{R})$，则

$$\|u\|_{m+1}\leqslant c, \qquad \lim_{t\to\infty}|D^m u(t)|_\infty=0, \tag{8.5}$$

其中 c 为正常数．

(iii) 如 $f(u)$ 满足

$$|f'(u)|\leqslant c|u|^p, \qquad |u|\ll 1, \quad p>2s+1, \tag{8.6}$$

且 $|u_0|_1<\infty$，则

$$|u(t)|_\infty=O((1+t)^{-\frac{1}{s}}), \qquad |u(t)|_2=O((1+t)^{-\frac{1}{2s}}), \quad t\to\infty. \tag{8.7}$$

证明 (i) (8.1)乘以 u，对 x 积分，得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|_2^2+\varepsilon|D^{\frac{s}{2}}u(t)|_2^2=0. \tag{8.8}$$

对 t 积分，得

$$|u(T)|_2^2+2\varepsilon\int_0^T|D^{\frac{s}{2}}u(t)|_2^2dt\leqslant c, \qquad \forall T\geqslant 0. \tag{8.9}$$

类似地，可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|D^{\frac{s}{2}}u|_2^2+\varepsilon|D^su|_2^2$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}|D^su|_2^2+\frac{1}{2\varepsilon}\int|f'(u)u_x|^2dx,$$

$$\frac{d}{dt}|D^{\frac{s}{2}}u|_2^2+\varepsilon|D^su|_2^2\leqslant c\int(|u|^{p'}+1)^2|u_x|^2dx$$

$$\leqslant c(|u_x|_2^{p'+2}+|u_x|_2^2),$$

其中我们用到了

$$|u|_\infty^{2p'}=\sup_y\left(\int_{-\infty}^y 2uu_x\,dx\right)^{p'}\leqslant c|u_x|_2^{p'}.$$

再利用加利亚尔多(G. Gagliardo)-尼伦伯格(L. Nirenberg)和 Young 不等式来估计 $|u_x|_2$,

$$|u_x|_2^{p'+2}\leqslant c(|D^su|_2^{\frac{1}{s}}|u|_2^{1-\frac{1}{s}})^{p+2}\leqslant\eta|D^su|_2^2+c(\eta).$$

当 η 适当小, 即得

$$\frac{d}{dt}|D^{\frac{s}{2}}u(t)|_2^2\leqslant c,$$

且 $\int_0^\infty|D^{\frac{s}{2}}u|_2^2dt<\infty$. $|D^{\frac{s}{2}}u(t)|_2^2$ 是 t 的连续正函数, 因而

$$\lim_{t\to\infty}|D^{\frac{s}{2}}u(t)|_2^2=0.$$

由索伯列夫嵌入定理, $H^{\frac{1}{2}+\alpha}\hookrightarrow L^\infty$, $\alpha>0$, $s>1$, 推出

$$\lim_{t\to\infty}|u(t)|_\infty=0.$$

(ii) 对(8.1)微商 m 次, 乘以 D^mu, 再积分, 得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|D^mu|_2^2+\varepsilon|D^{m+\frac{s}{2}}u|_2^2=\int D^mf(u)\cdot D^{m+1}u\,dx$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{4}|D^{m+1}u|_2^2+c|D^mu|_2^2, \tag{8.10}$$

其中我们用到了加利亚尔多-尼伦伯格不等式和估计

$$|D^mf(u)|_2\leqslant c(f,\ m,\ |u|_\infty)|D^mu|_2.$$

不等式(8.10)乘以正数 k，并和(8.8)式相加，当 $k>0$ 充分小和 $m\geqslant\frac{s}{2}$ 时，有

$$\frac{d}{dt}\left[\int(1+k|\xi|^{2m})|\hat{u}(\xi,\ t)|^2d\xi\right]\leqslant 0.$$

这就推得 $\|u\|_{H^m}$ 的有界性．为证明命题，将 m 置换为 $m+1$，并用插值不等式，即得．

(iii) 考虑(8.1)的线性化方程的基本解

$$G(x,\ t)=(2\pi)^{-1}\int e^{-t\varepsilon|\xi|^s-it\delta\xi p(\xi)+ix\xi}d\xi. \tag{8.11}$$

容易看到，$G(x,\ t)t^{\frac{1}{s}}$ 和 $|G(t)|_2t^{\frac{1}{2s}}$ 是有界的．(8.1)的解 u 能表为积分方程

$$u(t)=G(t-T)*u(T)-\int_T^t G(t-\tau)*f(u(\tau))_x d\tau, \tag{8.12}$$

其中"$*$"表示两个函数的卷积，$t\geqslant T\geqslant 0$．由卷积的基本不等式，有

$$|u(t)|_\infty\leqslant|G(t-\tau)|_2|u(T)|_2 +\int_T^t|G(t-\tau)|_\infty|f(u(\tau))_x|_1d\tau. \tag{8.13}$$

从(i)可知当 T 充分大时，$\tau\geqslant T$，$|u(\tau)|_\infty$ 充分小，且有估计

$$|f(u)_x|_1\leqslant\left|\frac{f'(u)}{u}\right|_\infty|u|_2|u_x|_2\leqslant c|u|_\infty^{p-1},$$

其中 c 依(i)趋于 0(当 $T\to\infty$ 时)．其次，从(8.13)有

$$|u(t)|_\infty\leqslant c|u(T)|_2(t-T)^{-\frac{1}{2s}}+c\int_T^t(t-s)^{-\frac{1}{s}}|u(\tau)|_\infty^{p-1}d\tau$$

或

$$W(t)\leqslant c+cW(t)^{p-1}, \tag{8.14}$$

其中 $W(t)=\sup\limits_{T\leqslant\tau\leqslant t}(1+\tau-T)^{\frac{1}{2s}}|u(\tau)|_\infty.\qquad(p>2s)$

我们看到，$W(T)$ 和 c 当 T 充分大时充分小，因此 $W(T)$ 是有界的，这就表明

$$|u(t)|_\infty=O((1+t)^{-\frac{1}{2s}}).$$

利用这一结果和 $f(u)$ 在(i)、(iii)中的假设，有

$$|u(t)|_2 \leqslant ct^{-\frac{1}{2s}}|u_0|_1 + c\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2s}}(1+\tau)^{-\frac{p-1}{2s}}d\tau$$

$$\leqslant c(1+t)^{-\frac{1}{2s}}, \qquad \text{对 } t \text{ 充分大。}$$

类似地可估计 $|u(t)|_\infty$，定理 1 证毕。

定理 2 $(\delta=0,\ s>0)$

(i) 如果 $f(u)\in C^1$, $u_0(x)\in L_1\cap H^s$，则有

$$|u(t)|_2 = O((1+t)^{-\frac{1}{2s}}),\ t\to\infty. \tag{8.15}$$

(ii) 如果 $f(u)\in C^{m+1}$, $u_0(x)\in L_1\cap H^m$, $m\in\mathbb{N}$, $s\geqslant 2$，则有

$$\begin{aligned}&\|u(t)\|_m = O((1+t)^{-\frac{1}{2s}}),\\&\sum_{j=0}^{m-1}|D^j u(t)|_\infty = O((1+t)^{-\frac{1}{2s}}).\end{aligned} \tag{8.16}$$

(iii) 如果 $|f'(u)|\leqslant c|u|^p$, $|u|\ll 1$, $p>2(s-1)$，则有

$$|u(t)|_\infty = O((1+t)^{-\frac{1}{s}}). \tag{8.17}$$

证明 (i) 由(8.8)，有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int|u(\xi)|^2 d\xi &= -2s\int|\xi|^s|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi\\&\leqslant -2s\int_A|\xi|^s|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi\\&\leqslant -(1+t)^{-1}\int_A|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi,\end{aligned} \tag{8.18}$$

其中 $\qquad A = A(t) = \{\xi\mid|\xi|>[2s(1+t)]^{-\frac{1}{s}}\}$.

由(8.18)可得

$$\frac{d}{dt}\left[(1+t)\int_R|\hat{u}|^2 d\xi\right]\leqslant\int_{R\setminus A}|\hat{u}|^2 d\xi$$

$$\leqslant c\int_{R\setminus A}d\xi\leqslant c[2s(1+t)]^{-\frac{1}{s}},$$

上式对 t 积分即得，其中

$$|\hat{u}(t)|\leqslant\sup_{t\geqslant 0}|u(t)|_1<\infty.$$

(ii) 设 $m\geqslant\frac{s}{2}$，类似于定理1中的(ii)，有

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int(1+k|\xi|^{2m})|\hat{u}(\xi)|^2d\xi\\&\quad\leqslant -s\int|\xi|^s(1+k|\xi|^{2m})|\hat{u}(\xi)|^2d\xi\\&\quad\leqslant -(1+t)^{-1}\int_A(1+k|\xi|^{2m})|\hat{u}(\xi)|^2d\xi,\end{aligned}$$

其中类似于(i)，

$$A=A(t)=\{\xi\,|\,|\xi|>[s(1+t)]^{-\frac{1}{s}}\}.$$

因此
$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big[(1+t)\int(1+k|\xi|^{2m})|\hat{u}(\xi)|^2d\xi\Big]\\&\quad\leqslant c\int_{R\setminus A}d\xi\leqslant c(1+t)^{-\frac{1}{s}},\end{aligned}$$

由此推出
$$\|u\|_m=O((1+t)^{-\frac{1}{2s}}).$$

其他结果，由索伯列夫不等式推得.

(iii) (8.1)线性化方程的基本解

$$G(x,t)=(2\pi)^{-1}\int e^{-ts|\xi|^s+ix\xi}d\xi$$

具有如下性质：$G(x,t)t^{\frac{1}{s}}$ 有界，$|G(t)|_1=\text{const}$. 由(8.1)可得

$$u(t)=G\Big(\frac{t}{2}\Big)*u\Big(\frac{t}{2}\Big)-\int_{t/2}^{t}G(t-\tau)*f(u(\tau))_x d\tau.$$

利用(i)、(ii)的结果，有

$$\begin{aligned}|u(t)|_\infty&\leqslant ct^{-\frac{1}{s}}+c\int_{t/2}^{t}(t-\tau)^{-\frac{1}{s}}|u(\tau)|_\infty^{p-1}|u(\tau)|_2|u(\tau)_x|_2d\tau\\&\leqslant ct^{-\frac{1}{s}}+c\int_{t/2}^{t}(t-\tau)^{-\frac{1}{s}}(1+\tau)^{-(p+1)/2s}d\tau.\end{aligned}$$

如果 $\frac{p+1}{2s}\geqslant1$，则(iii)已证. 利用迭代原理，假设 $p>2(s-1)$ 是足够的：估计 $|u(t)|_\infty\leqslant ct^{-r}$，$r\geqslant(2s)^{-1}$，每一步指数至少改善 $(p+2)\cdot(2s)^{-1}-1>0$，直到 $r\leqslant s^{-1}$.

现考虑(8.1)方程的第三种情况，即纯色散的模型. 此时，衰

减估计更为困难，原因是它的能量是守恒的，即 $|u(t)|_2=\text{const}$. 如它的孤立子解当 $t\to\infty$ 时不衰减，它的线性化方程解的衰减估计也是很难得到的．为此，我们设 $p(\xi)=|\xi|^{r-1}$, $r\geqslant 3$, 且考虑小初值的情况，

$$u_t+f(u)_x+\delta(D^{r-1}u)_x=0. \tag{8.19}$$

定理 3 $(\delta\neq 0,\ \varepsilon=0)$

(i) 如果

$$\begin{aligned}&|f(u)|\leqslant c(1+|u|^d), \quad d<2r-1\\ &|f'(u)|\leqslant c|u|^p, \qquad |u|\ll 1,\ p>r+1\end{aligned} \tag{8.20}$$

且初值充分小：

$$\|u_0\|_1+\|u_0\|_{\frac{r-1}{2}}\leqslant\eta, \tag{8.21}$$

其中 η 依赖于 r 和 f, 则有

$$|u(t)|_\infty=O((1+|t|)^{-\frac{1}{r}}), \qquad |t|\to\infty \tag{8.22}$$

且存在线性化方程

$$v_t+\delta(D^{r-1}v)_x=0 \tag{8.23}$$

的解 u_+、u_-, 使得

$$t^{\frac{1}{r}}|u(t)-u_\pm(t)|_2\to 0. \qquad t\to\pm\infty \tag{8.24}$$

(ii) 比普通简单插值好的 L_q 衰减结果是

$$\begin{aligned}&|u(t)|_{2(p+1)}=O((1+|t|)^{-\left(1-\frac{1}{p+1}\right)r}).\\ &p>[r+(r^2+4r)^{\frac{1}{2}}]/2.\end{aligned} \tag{8.25}$$

证明 (i) 方程(8.19)的线性方程的基本解为

$$G(x,\ t)=(2\pi)^{-1}\int e^{-it\delta\xi|\xi|^{r-1}+ix\xi}d\xi, \tag{8.26}$$

它能表示为

$$G(x,\ t)=t^{-\frac{1}{r}}\Phi_r(xt^{-\frac{1}{r}}) \tag{8.27}$$

的形式，其中 $\Phi_r(x)=(2\pi)^{-1}\int e^{-i\delta\xi|\xi|^{r-1}+ix\xi}d\xi$, $r\geqslant 2$, 对于实的 x 是有界的．这是由广义 Airy 函数的渐近估计得到的．现考虑

$t\to\infty$, (8.19)的解可写成

$$u(t)=G(t)*u_0-\int_0^t G(t-\tau)*f(u(\tau))_x d\tau. \tag{8.28}$$

由此可得估计

$$|u(t)|_\infty\leqslant|G(t)|_\infty|u_0|_1+\int_0^t|G(t-\tau)|_\infty|f(u(\tau))_x|_1 d\tau$$

$$\leqslant c|u_0|_1 t^{-\frac{1}{r}}+c\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{1}{r}}|u(\tau)|_\infty^{p-1}d\tau. \tag{8.29}$$

注意到

$$p(\xi)\geqslant c|\xi|^\lambda, \qquad |\xi|\text{充分大}, \ \lambda\geqslant 2$$
$$|f(u)|\leqslant c(1+|u|^d), \qquad \forall u, \ d<2\lambda+1$$
$$|f(u)|\leqslant c|u|, \qquad |u|\ll 1$$

则当 $u_0\in D(H^{\frac{1}{2}})$时，可以推出$|u(t)_x|_2$是有界的；且当$\|u_0\|_{\frac{\lambda}{2}}$充分小时，$|u(t)|_\infty$充分小。类似于定理1(iii)的证明，令

$$W(t)=\sup_{0<t\leqslant\tau}(1+\tau)^{\frac{1}{r}}|u(\tau)|_\infty,$$

则由(8.29)，有

$$W(t)\leqslant c|u_0|_1+cW(t)^{p-1},$$
$$W(0)=|u_0|_\infty. \tag{8.30}$$

由于 $|u_0|_1+\|u_0\|_{\frac{r-1}{2}}\leqslant\eta$，可推出$W(t)$的有界性，因而

$$|u(t)|_\infty=O((1+|t|)^{-\frac{1}{r}}).$$

最后，注意到$u(t)$渐近等于

$$u_+(t)=G(t)*u_0-\int_0^\infty G(t-\tau)*f(u(\tau))_x d\tau$$

$$=u(t)-\int_t^\infty G(t-\tau)*f(u(\tau))_x d\tau,$$

依 L_2 积分收敛，且

$$|u(t)-u_+(t)|_2\leqslant\int_t^\infty|f(u(\tau))_x|_2 d\tau$$

$$\leqslant c\int_t^\infty \tau^{-\frac{p}{r}}d\tau, \qquad p>r+1$$

由此即得$t^{\frac{1}{r}}|u(t)-u_+(t)|_2\to 0$，$t\to+\infty$。类似地，可证

$$t^{\frac{1}{r}}|u(t)-u_-(t)|_2\to 0. \qquad t\to-\infty$$

(ii) 卷积算子 $G_t u = G(t) * u$ 具有性质

$$G_t: L_2 \to L_2, \qquad \|G_t\|_{2,2} = 1,$$

$$G_t: L_1 \to L_\infty \qquad \|G_t\|_{1,\infty} \leqslant ct^{-\frac{1}{r}},$$

$$G_t: L_q \to L_q, \qquad 2 < q < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

$$\|G_t\|_{q',q} \leqslant ct^{(q-1)/r}.$$

记 $q = 2(p+1)$, $a = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2}{q}\right)$, $q' = 1 + \frac{1}{2p+1}$. 从解的积分表达式，有

$$\begin{aligned} |u(t)|_q &\leqslant \|G_t u_0\|_q + \int_0^t |G_{t-\tau}(f(u(\tau))_x)|_q d\tau \\ &\leqslant ct^{-a}|u_0|_q + c\int_0^t (t-\tau)^{-a}|u(\tau)|_q^p d\tau, \end{aligned} \tag{8.31}$$

其中

$$|f(u)_x|_{q'} \leqslant |f'(u)|_{q/p}|u_x|_2 \leqslant c|u|_q^p|u_x|_2 \leqslant c|u|_q^p.$$

令 $W(t) = \sup\limits_{0<\tau<t}(1+\tau)^a|u(\tau)|_q$, 则由(8.32)，有

$$W(t) \leqslant c\|u_0\|_q + cW(t)^p. \qquad (a,\ p>1)$$

因此，$W(t)$ 有界，由此即得

$$|u(t)|_{2(p+1)} = O(1+|t|)^{-(1-\frac{1}{p+1})r}.$$

为了研究广义 KdV 方程解的高阶导数模当 $t\to\infty$ 时的衰减性，我们考虑如下 KdV 方程的柯西问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^\lambda}{\lambda}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^\alpha u\right] = 0, \quad x\in\mathbb{R},\ t>0 \tag{8.32}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \qquad x\in\mathbb{R} \tag{8.33}$$

其中 $\lambda>1$, $\alpha>0$.

先考虑线性问题.

$$\partial_t u + \partial_x(-\partial_x^2)^\alpha u = 0, \qquad u(x,\ 0) = u_0(x) \tag{8.34}$$

的解是

$$u(x,t)=\frac{2}{t^{(2\alpha+1)^{-1}}}\int_{-\infty}^{+\infty}g\left(\frac{x-x'}{t^{(2\alpha+1)^{-1}}}\right)v_0(x')dx', \qquad (8.35)$$

其中

$$g(x)=\int_0^{\infty}\cos(\xi^{2\alpha+1}+x\xi)d\xi. \qquad (8.36)$$

设 $\alpha>0$，以保证积分(8.36)的存在性．当 $\alpha=1$ 时

$$g(x)=3^{-\frac{1}{3}}\pi A_i(3^{-\frac{1}{3}}x), \qquad (8.37)$$

其中 $A_i(z)$ 是众所周知的 Airy 函数．

$$g(x)=O(x^{-\frac{1}{4}}), \qquad (x\to-\infty) \qquad (8.38)$$

$g(x)\to+\infty$ 为指数衰减，我们有

定理 4 设 $\beta=2\alpha+1$，$\alpha>1$，则

(i) 当 $x\to-\infty$ 时，

$$g(x)\sim\frac{\sqrt{\pi}}{\frac{\beta(\beta-1)}{2}\left(\frac{|x|}{\beta}\right)^{\frac{\beta-2}{2(\beta-1)}}}\cos\left[(1-\beta)\left(\frac{|x|}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}}+\frac{\pi}{4}\right]$$

$$+O(|x|^{-(\beta-2)/2(\beta-1)}). \qquad (8.39)$$

(ii) 当 $x\to+\infty$ 时

如果 $\beta=2n$，$(n=1, 2, \cdots)$

$$g(x)\sim(-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{[2n(2k+1)]!}{(2k+1)!x^{2n(2k+1)+1}};$$

$$(\beta=2n;\ n=1, 2, \cdots) \qquad (8.40)$$

如果 $\beta=2n+1$，$(n=1, 2, \cdots)$

$$g(x)\sim\pi\frac{(2n+1)^{-\frac{1}{4}}}{2n^{\frac{1}{2}}}\cdot x^{-\left(\frac{2n-1}{n}\right)}\sum_{j=1}^{n}\exp$$

$$\times\left\{-\frac{2n}{2n+1}(2n+2)^{-\frac{1}{2n}}\cdot x^{1+\frac{1}{2n}}\exp\left[\frac{i(2j-1)}{2n}\pi\right]\right.$$

$$\left.+\frac{2j-1}{2n}\pi-\frac{\pi}{4}\right\}; \qquad (8.41)$$

如果 β 不是一个整数，

$$g(x) \sim -\frac{\beta! \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \beta\right)}{x^{\beta+1}}. \tag{8.42}$$

从(8.39)～(8.42)可推出：如 $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$，$g(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$。

证明 将(8.36)写为

$$g(x) = \operatorname{Re} \int_0^\infty \exp[i(x\xi + \xi^\beta)] d\xi. \tag{8.43}$$

(i) $g(x)$当 $x \to -\infty$ 时的状态，令

$$s = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}}, \tag{8.44}$$

改变积分变元，$\xi = (1+\tau)s^{\frac{1}{\beta}}$，则(8.43)变为

$$g(x) = s^{\frac{1}{\beta}} \operatorname{Re} G(s), \tag{8.45}$$

其中

$$G(s) = \int_{-1}^\infty \exp[isp(\tau)] d\tau,$$
$$p(\tau) = (1+\tau)^\beta - \beta(1+\tau). \tag{8.46}$$

记 $G(s) = G_1(s) + G_2(s)$，其中

$$G_1(s) = \int_0^\infty \exp[isp(\tau)] d\tau,$$
$$G_2(s) = \int_{-1}^0 \exp[isp(\tau)] d\tau. \tag{8.47}$$

首先处理 $G_1(s)$. 应用定常相方法，由(8.46)定义的 $p(\tau)$ 满足奥尔弗(P. J. Olver)[132]第101页的定理13.1条件(在此定理中所提到常数 a、p、u、Q 和 λ 分别取 0、$1-\beta$、$\beta\frac{(\beta-1)}{2}$、τ 和 1)推知

$$G_1(s) = \frac{1}{2} p\left(\frac{1}{2}\right) e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\exp[is(1-\beta)]}{\left[\frac{1}{2}\beta(\beta-1)s\right]^{\frac{1}{2}}} + o(s^{-\frac{1}{2}}).$$

$$(s \to +\infty) \tag{8.48}$$

对于 $G_2(s)$，在(8.47)中作积分变换 $\tau = -\tau'$，此时，由奥尔弗书中的定理13.1，有

$$G_2(s)=G_1(s)+o(s^{-\frac{1}{2}}). \qquad (s\to+\infty)$$

因此

$$G(s)=2G_1(s)+o(s^{-\frac{1}{2}}). \qquad (s\to+\infty)$$

由 s 的定义(8.44)，可知(8.39)成立.

(ii) $g(x)$当 $x\to+\infty$ 时的形态. 定义

$$s=x^{\frac{\beta}{\beta-1}}. \tag{8.49}$$

作变换

$$\xi=\tau s^{1/\beta}. \tag{8.50}$$

(8.43)可写为

$$g(x)=s^{1/\beta}\mathrm{Re}G(s), \tag{8.51}$$

其中

$$G(s)=\int_0^\infty \exp[isp(\tau)]d\tau, \qquad p(\tau)=\tau+\tau^\beta. \tag{8.52}$$

我们看到函数$p(\tau)$当 $\tau\in[0, \infty)$ 时是单调增函数，且单一地把区间$[0, \infty)$映照到自身. 因此存在$p(\tau)$的反函数，记为$h(\sigma)$，即$\tau=h(\sigma)$. 因为$\beta>1$，$p'(\tau)$ 对一切$\tau\in[0, \infty)$存在，且$p'(\tau)\neq 0$，这就保证$h'(\sigma)$对一切$\sigma\in[0, \infty)$的存在性. 因此可改变积分变元，$\sigma=p(\tau)$，(8.52)为

$$G(s)=\int_0^\infty \exp[is\sigma]h'(\sigma)d\sigma. \tag{8.53}$$

我们利用以下结果来研究$G(s)$当$s\to\infty$时的渐近状态.

设函数$v(\xi)\in C^{m-1}([0,\infty))$，使得$\lim\limits_{\xi\to\infty} v^{(k)}(\xi)=0$, $0<k\leqslant m-1$，则对实的r，有

$$\int_0^\infty \exp[ir\xi]v(\xi)d\xi$$
$$=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{v^{(k)}(0)}{(-ir)^{k+1}}+\int_0^\infty \frac{\exp(ir\xi)}{(-ir)^m}v^m(\xi)d\xi, \tag{8.54}$$

其中(8.54)右端积分存在. 如果$\int_0^\infty |v^{(m)}(\xi)|d\xi<\infty$，则(8.54)右

端的积分为 $O(r^{-m})$，$r\to\infty$. 如果 $m=\infty$，则

$$\int_0^\infty \exp[ir\xi]v(\xi)d\xi \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v^{k}(0)}{(-ir)^{k+1}}. \qquad r\to\infty \quad (8.55)$$

现考虑函数 $h(\sigma)$. $h(\sigma)$对一切 $\sigma\in(0,\infty)$为无穷可微，如同 $p(\tau)$对 $\tau\in(0,\infty)$. 进一步，有

$$\lim_{\sigma\to\infty} h^{(k)}(\sigma)=0. \qquad (k=1,2,\cdots) \quad (8.56)$$

事实上，因为

$$h^{(k)}(\sigma)=\left(\frac{1}{p'(\tau)}\frac{d}{d\tau}\right)^{k-1}\frac{1}{p'(\tau)}, \quad (k=1,2,\cdots) \quad (8.57)$$

而 $p'(\tau)=O(\tau^{\beta-1})$，$\tau\to\infty$，$\beta>1$，因此(8.56)成立.

现设 $\beta>1$ 为整数，则 $h^{(k)}(0)$存在($k=1,2,\cdots$)，由(8.55)可知

$$G(s)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h^{(k+1)}(\sigma)}{(-is)^{k+1}}. \qquad (s\to\infty) \quad (8.58)$$

因为仅 $\mathrm{Re}G(s)$对 $g(x)$ 有贡献，我们有 ($s=x^{\frac{\beta}{\beta-1}}$)

$$g(x)\sim s^{\frac{1}{\beta}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^{(2k)}(0)}{(-is)^{2k}}. \qquad (x\to+\infty) \quad (8.59)$$

当 $\beta=2n$ 时($n=1,2,\cdots$)，用拉格朗日-Bürmann 公式，有

$$h(\sigma)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{(2nj)!}{j!}\frac{\sigma^{j(2n-1)+1}}{[j(2n-1)+1]!}. \quad (8.60)$$

联合(8.59)、(8.60)，可得(8.40).

当 $\beta=2n+1$ 时($n=1,2,\cdots$)，$h(\sigma)$ 为 σ 的奇函数，因此 $h^{2k}(0)=0$，$k=1,2,\cdots$. 此时(8.59)右端求和号不出现，有

$$g(x)=o(x^{-\mu}). \qquad (\forall\mu>0) \quad (8.61)$$

$g(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的渐近状态由最速下降法得到. 此时 $g(x)$ 可表为

$$g(x)=\frac{1}{2}s^{\frac{1}{\beta}}\cdot\tilde{G}(s), \quad (8.62)$$

其中
$$\tilde{G}(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[isp(\tau)]d\tau,$$

s、τ 仍由(8.49)、(8.50)所定义，$p(\tau)$由(8.52)所确定．首先注意到在 τ 的上半平面，沿着射线

$$\arg\tau=\theta_k=(4k+1)\pi/(4n+2), \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

$\exp[isp(\tau)]$指数地趋于 0，$p(\tau)$的驻点是方程

$$p'(\tau)=1+(2n+1)\tau^{2n}=0$$

的根，它们在 τ 的上半平面为

$$\tau_j^*=(2n+1)^{-\frac{1}{2n}}\exp[i\theta_j^*], \qquad \theta_j^*=(2j-1)\pi/2n$$

注意到

$$0<\theta_0<\theta_1^*<\theta_1<\theta_2^*<\cdots<\theta_n^*<\theta_n<\pi, \tag{8.63}$$

现变化积分围道，使得 $\widetilde{G}(s)$为

$$\widetilde{G}(s)=\sum_{k=1}^{n}\int_{\Gamma_k}\exp[isp(\tau)]d\tau, \tag{8.64}$$

其中 Γ_k 为最速下降围道通过 τ_k^*．当 $\tau\to\infty$ 时，它渐近地趋近于射线 $\arg\tau=\theta_{\tau-1}$ 和 $\arg\tau=\theta_\tau$．对 $n=5$，见图 8-1．

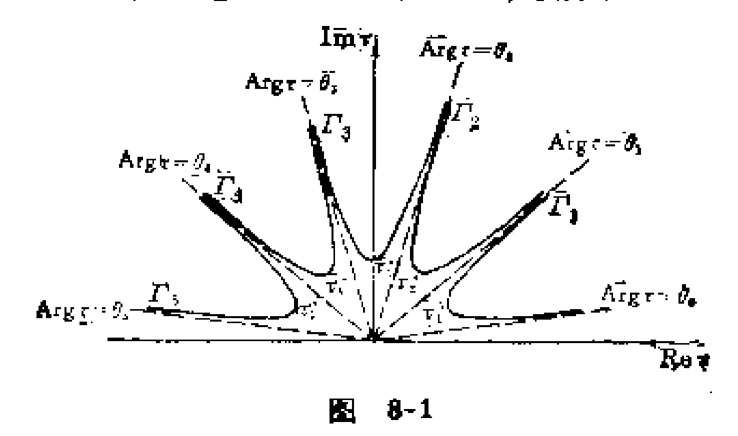


图 8-1

由此可知

$$p(\tau_k^*)=\frac{2n}{2n+1}\tau_k^*, \qquad p''(\tau_k^*)=-\frac{2n}{\tau_k^*}, \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

因此

$$G(s)\sim\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\pi\tau_k^*}{ns}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[i\left(\frac{2n}{2n+1}\tau_k^*s+\frac{\theta_k^*}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]. \quad (s\to\infty)$$

$$\tag{8.65}$$

由此易得，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)$的渐近形态(8.41)．

最后，设β不是整数．令$\beta=m+1-\delta$，$m=1, 2, \cdots$，$0<\delta<1$．由于$p(\tau)$在$[0, \infty)$上m次连续可微，推出$h'(\sigma)$在$[0, \infty)$上为$m-1$次可微，

$$p'(\tau)=1+\beta\tau^{\beta-1}, \qquad p''(\tau)=\beta(\beta-1)\tau^{\beta-2},$$

推出$h'(0)=1$，$h^{(k)}(0)=0$，$2\leqslant k\leqslant m$．因此，由(8.54)，有

$$G(s)=\frac{1}{-is}+\int_0^\infty \frac{\exp[is\sigma]}{(-is)^m} h^{(m+1)}(\sigma)d\sigma. \qquad (8.66)$$

由(8.57)，对$k\geqslant 2$，有

$$h^{(k)}(\sigma)\sim -\beta(\beta-1)\cdots(\beta-k+1)\sigma^{\beta-k}, \qquad (\sigma\to 0)$$

它推出(8.62)右端的G的积分满足[132]中定理13.1条件，因此

$$G(s)\sim\frac{1}{-is}-\frac{\exp[i\pi(\beta-m)/2]}{(is)^m}\beta(\beta-1)\cdots$$

$$(\beta-m)\frac{\Gamma(\beta-m)}{s^{\beta-m}}, \qquad (s\to\infty) \quad (8.67)$$

将(8.67)代入(8.51)，得到(8.42)．

推论1 设初值$u_0(x)\in L_p(\mathbb{R})\cap H^1(\mathbb{R})$，则方程(8.34)的解$\alpha\geqslant\frac{1}{2}$有估计

$$|u(t)|_{L_q}\leqslant(1+t)^{\frac{1}{2\alpha+1}(1-\frac{2}{q})}(|u_0|_{L_p}+|u_0|_{H^1}), \qquad (8.68)$$

其中

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \qquad 1\leqslant p\leqslant 2.$$

证明：由定理4，有

$$|u(t)|_{L_\infty}\leqslant ct^{-\frac{1}{2\alpha+1}}|u_0|_{L_1}. \qquad (t>0)$$

进一步，易验证

$$|u(t)|_{L_2}=|u_0(x)|_{L_2}.$$

由L_2和L_∞的插值，即得(4.68)．

现考虑非线性问题的估计．

众所周知，如$u_0(x)\in H^s(\mathbb{R})$，$s>\frac{3}{2}$，则初值问题(8.32)、(8.33)具有唯一整体解$u\in L^\infty([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$．

命题1 对于 $u_0(x)\in H^s$, $s>\frac{3}{2}$, 则对于初值问题(8.32)、(8.33)的解，有如下估计：

$$|u(t)|_{H^3}\leqslant|u_0|_{H^3}\exp\left\{c\int_0^t|u(\tau)|_{W^{1,2\lambda}}^{\lambda-1}d\tau\right\},\quad(\lambda>1)\qquad(8.69)$$

方程(8.32)和 ∂_x^6u 作内积，可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int|\partial_x^3u|^2dx+\int\partial_x^3u\partial_x^3(u^{\lambda-1}\partial_xu)dx=0.\qquad(8.70)$$

(8.70)左端第二项分作四项，分别估计如下：

(i) $$\left|\int u^{\lambda-2}u_x(u_x^3u)^2dx\right|\leqslant|u|_\infty^{\lambda-2}|\partial_xu|_{L_\infty}|u|_{H^3}^2$$

$$\leqslant c|u|_{W^{1,q}}^{\lambda-1}|u|_{H^3}^2,\qquad q>1\qquad(8.71)$$

(ii) $$\left|\int u^{\lambda-2}(\partial_x^2u)^2\partial_x^3u\,dx\right|\leqslant|u|_{L_{4\lambda}}^{\lambda-2}|\partial_x^2u|_{L_{4\lambda}}^2|\partial_x^3u|_{L_2},\qquad(8.72)$$

以上利用了赫尔德不等式．由索伯列夫不等式

$$|\partial_x^2u|_{L_{4\lambda}}\leqslant|\partial_x^2u|_{H^1},\qquad(\lambda>1)\qquad(8.73)$$

因此

$$\left|\int u^{\lambda-2}(\partial_x^2u)^2\partial_x^3u\,dx\right|\leqslant c|u|_{W^{1,2\lambda}}^{\lambda-1}|u|_{H^3}^2.\qquad(8.74)$$

(iii) $$\left|\int u^{\lambda-3}(\partial_xu)^2\partial_x^2u\partial_x^3u\,dx\right|$$

$$\leqslant c|\partial_x^3u|_{L_2}|\partial_x^2u|_{L_{2\lambda}}|\partial_xu|_{L_{4\lambda}}^2|u|_{L_{4\lambda}}^{\lambda-3}.\qquad(8.75)$$

(iv) $$\left|\int\partial_x^3uu^{\lambda-4}(\partial_xu)^4dx\right|\leqslant c|\partial_x^3u|_{L_2}|u|_{L_{4\lambda}}^{\lambda-4}|\partial_xu|_{L_{4\lambda}}^4,\qquad(8.76)$$

于是有

$$\frac{d}{dt}|u|_{H^3}\leqslant c|u|_{W^{1,2\lambda}}^{\lambda-1}|u|_{H^3}.$$

利用格隆沃尔不等式，即得(8.69)．

命题2 设 $\alpha\geqslant\frac{1}{2}$, $\lambda>\alpha+\frac{3}{2}+\left(\alpha^2+3\alpha+\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$，则存在常数 $\delta>0$，使得对初值

$$u_0\in W^{2,p}(R)\cap H^3(R),\qquad p=\frac{2\lambda}{\lambda-1},$$

满足条件

$$\|u_0\|_{W^{2,p}}\cap\|v_0\|_{H^3}<\delta$$

时，初值问题(8.32)、(8.33)的解 $u(t)$ 所确定的函数

$$M(t)=\sup_{0\leqslant s\leqslant t}(1+s)^{(1-\frac{1}{\lambda})/(2\alpha+1)}\|u(s)\|_{W^{2,2\lambda}}\qquad(8.77)$$

对一切 $t\in[0,\ T]$ 有界，且与 T 无关。

证明 方程(8.32)的解可写为

$$u(x,\ t)=G(t)u_0(x)+\int_0^t G(t-s)\partial_x\left(\frac{u^\lambda}{\lambda}\right)(x,\ s)ds,\qquad(8.78)$$

其中算子 $G(t)$ 表示基本解 $\frac{1}{t^{(2\alpha+1)^{-1}}}\,g\left(\frac{x}{t^{(2\alpha+1)^{-1}}}\right)$,

$$g(x)=\int_0^\infty\cos(\xi^{2\alpha+1}+x\xi)d\xi.$$

由(8.68)，有

$$\|u(t)\|_{W^{2,2\lambda}}\leqslant c\,(1+t)^{-\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)/(2\alpha+1)}(\|u_0\|_{H^3}+\|u_0\|_{W^{2,\frac{2\lambda}{2\lambda-1}}})$$
$$+\int_0^t(t-s)^{-\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)/(2\alpha+1)}\|u^{\lambda-1}\partial_x u\|_{W^{2,\frac{2\lambda}{2\lambda-1}}}ds.$$
$$(8.79)$$

由赫尔德不等式，

$$\|u^{\lambda-1}\partial_x u\|_{W^{2,\frac{2\lambda}{2\lambda-1}}}\leqslant c\|u\|^{\lambda-1}_{W^{2,2\lambda}}\|u\|_{H^3}.\qquad(8.80)$$

由(8.69)可得

$$\|u(s)\|_{H^3}\leqslant c\|u_0\|_{H^3}\exp\int_0^s f(\tau)M(\tau)^{\lambda-1}d\tau,\qquad(8.81)$$

其中

$$f(s)=\int_0^s(1+\tau)^{-\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda(2\alpha+1)}}d\tau.\qquad(8.82)$$

将(8.80)、(8.81)代入(8.79)，可得

$$M(t)\leqslant c(\|u_0\|_{H^3}+\|u_0\|_{W^{2,\frac{2\lambda}{2\lambda-1}}})$$
$$+c\|u_0\|_{H^3}\exp[f(t)M(t)^{\lambda-1}]M(t)^{\lambda-1}h(t),\qquad(8.83)$$

其中

$$h(t)=\int_0^t \frac{(1+t)^{(1-\frac{1}{\lambda})/(2\alpha+1)}}{(t-s)^{(1-\frac{1}{\lambda})/(2\alpha+1)}}(1+s)^{-(\lambda-1)^2/\lambda(2\alpha+1)}. \qquad (8.84)$$

在条件

$$\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda(2\alpha+1)}>1 \qquad (8.85)$$

下，函数 $f(t)$ 和 $h(t)$ 一致有界，(8.83)改写为

$$M(t)\leqslant c\delta\{1+c_1 M(t)^{\lambda-1}\exp[c_2 M(t)^{\lambda-1}]\}, \qquad (8.86)$$

其中 $\delta=|u_0|_{H^3}+|u_0|_{W^{1,\frac{2\lambda}{2\lambda-1}}}$.

现考虑函数

$$\varphi(m)=c\delta[1+c_1 m^{\lambda-1}\exp(c_2 m^{\lambda-1})]-m. \qquad (8.87)$$

当 δ 充分小时，$\varphi(m)$ 具零点 m_1. 如果 $\delta<m_1$, 则 $M(0)<m_1$, 推之，

$$M(t)\leqslant m_1, \qquad (\forall t>0) \quad (8.88)$$

这就完成了命题 2 的证明.

定理 5 设 $\alpha\geqslant\frac{1}{2}$, $\lambda>\alpha+\frac{3}{2}\left(\alpha^2+3\alpha+\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$, 且存在一个常数 $\delta>0$, 如初值 $u_0\in W^{2,p}(\mathbb{R})\cap H^3(\mathbb{R})$ 满足

$$p=\frac{2\lambda}{2\lambda-1}, \qquad |u_0|_{W^{1,p}}+|u_0|_{H^3}<\delta,$$

则存在问题(8.32)、(8.33)的唯一解 $u\in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^3(\mathbb{R}))$, 且满足

$$|u(t)|_{W^{1,2\lambda}}\leqslant c(1+t)^{-(1-\frac{1}{\lambda})/(2\alpha+1)}. \qquad (8.89)$$

更进一步，问题(8.32)、(8.33)的解渐近于自由问题的解，即存在线性问题(8.34)的解 $u_\pm$, 使得

$$|u(t)-u_\pm(t)|_{H^3}\to 0. \qquad (t\to\pm\infty) \quad (8.90)$$

证明 对问题(8.32)、(8.33)的解，有如下估计:

$$\begin{aligned}|u(t)|_{H^3}&\leqslant c|u_0|_{H^3}\exp[cM(T)]\\&\leqslant c|u_0|_{H^3}\exp[cM_0]\leqslant k, \quad \forall t\in[0, T] \quad (8.91)\end{aligned}$$

令

$$u_\pm(t)=u(t)+\int_t^{\infty}G(t-s)\partial_x\left(\frac{u^\lambda}{\lambda}\right)(s)ds, \qquad (8.92)$$

(8.92)右端的积分存在，这是由于

$$\left|\int_t^{\pm\infty}G(t-s)\partial_x\left(\frac{u^\lambda}{\lambda}\right)(s)ds\right|_{H^1}$$

$$\leqslant c\int_t^{\pm\infty}|u(s)|^{\lambda-1}_{W^{1,q}}|u(s)|_{H^1}ds$$

$$\leqslant ckM_0^{\lambda-1}\int_0^{\pm\infty}(1+s)^{-(\lambda-1)^2/\lambda(2\alpha+1)}ds.$$

由上式即知 $u_\pm(t)$ 已有定义，即当 $t\to\pm\infty$ 时，有

$$|u(t)-u_\pm(t)|_{H^1}\to 0.$$

容易验证 $u_\pm(t)$满足线性方程(8.34)，定理证毕.

附注1 定理4的结果($\alpha=1$)和当 $r=3$ 时定理3的结果依 L_q 模解的衰减估计是一致的.

§9 纳维–斯托克斯方程弱解的 L_2 衰减估计

先考虑 n 维纳维-斯托克斯方程($n\geqslant 3$)的柯西问题

$$\begin{cases} u_t^i+u\cdot\nabla u^i-\Delta u^i+\nabla_i p=f^i, & i=1,\ 2,\ \cdots,\ n, \\ \nabla\cdot u=0, \\ u(x,\ 0)=u_0(x), & x\in\mathbb{R}^n \end{cases} \qquad (9.1)$$

的解的 L_2 衰减. 其中 $f=(f^1,\ f^2,\ \cdots,\ f^n)$依 L_2 具有适当的衰减率. 记

$$|g(\cdot,\ t)|_p=\left(\int_{R^n}|g(x,\ t)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (p\geqslant 1)$$

先设 $f=0$.

定理1 设 u: $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^n$, p: $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ 均为光滑函数，u 在 $|x|\to\infty$ 时急剧趋于0. 设 u 和 p 满足

$$
\begin{cases}
u_t^i + u\cdot\nabla u^i - \Delta u^i + \nabla_i p = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \\
\nabla\cdot u = 0, \\
u(x, 0) = u_0(x),
\end{cases}
\tag{9.2}
$$

且 $u_0(x)\in L_2(\mathbb{R}^n)\cap L_1(\mathbb{R}^n)$，则

$$
|u(\cdot, t)|_2^2 \leqslant c(t+1)^{-\frac{n}{2}+1}. \tag{9.3}
$$

其中常数 c 仅依赖于 u_0 的 L_1 和 L_2 模，以及 n.

证明 (9.2)乘以 u，并在 $\mathbb{R}^n$ 上积分，可得

$$
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}|u|^2 dx = -2\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2 dx. \tag{9.4}
$$

应用普朗歇尔(M. Plancherel)定理于(9.4)，得

$$
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}|^2 d\xi = -2\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi, \tag{9.5}
$$

其中 $\hat{u}(\xi)$ 表 u 的傅里叶变换. 将(9.5)右端的积分写成两部分

$$
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}|^2 d\xi = -2\int_{s(t)^c}|\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi - 2\int_{s(t)}|\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi,
$$

其中 $s(t)$是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个球，它的中心在原点，半径为

$$
r(t) = \left[\frac{n}{2(t+1)}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{9.6}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}|^2 d\xi &\leqslant -\frac{n}{(t+1)}\int_{s(t)^c}|\hat{u}|^2 d\xi - 2\int_{s(t)}|\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi \\
&= -\frac{n}{(t+1)}\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}|^2 d\xi \\
&\quad + \int_{s(t)}\left(\frac{n}{t+1} - 2|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2 d\xi,
\end{aligned}
$$

即有

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}|^2 d\xi + \frac{n}{(t+1)}\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}|^2 d\xi \\
&\leqslant \frac{n}{(t+1)}\int_{s(t)}|\hat{u}|^2 d\xi.
\end{aligned}
\tag{9.7}
$$

我们将在下面作这样的估计

$$|\hat{u}(\xi, t)| \leqslant c|\xi|^{-1}, \qquad (\xi \in s(t)) \quad (9.8)$$

其中常数 c 仅依赖于 u_0 的 L_1 模与 L_2 模. 利用(9.7)、(9.8), 有

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 d\xi + \frac{n}{(t+1)}\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 d\xi$$

$$\leqslant \frac{c}{(t+1)}\int_{s(t)} |\xi|^{-2} d\xi.$$

乘上积分因子 $(t+1)^n$, 得

$$\frac{d}{dt}\left[(t+1)^n \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 d\xi\right] \leqslant c(t+1)^{n-1} \int_s |\xi|^{-2} d\xi.$$

上式右端可表为

$$cW_0(t+1)^{n-1}\int_0^r r^{n-1}\cdot r^{-2} dr,$$

其中 W_0 为 n 维单位球的体积, $r(t)$ 为(9.6)确定的半径. 因此,

$$\frac{d}{dt}\left[(t+1)^n \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 d\xi\right]$$

$$\leqslant \frac{cW_0}{n-2}(t+1)^{n-1}\left[\frac{n}{2(t+1)}\right]^{\frac{n}{2}-1} \leqslant c(t+1)^{\frac{n}{2}}.$$

上式两边对 t 积分, 得

$$(t+1)^n\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 d\xi \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi, 0)|^2 d\xi + c[(1+t)^{\frac{n}{2}+1} - 1].$$

因为 $u_0 \in L_2$, 由普朗歇尔定理, 得

$$\int_{R^n} |\hat{u}|^2 dx \leqslant c(1+t)^{-\frac{n}{2}+1}.$$

为完成定理的证明, 我们需要建立不等式(9.8). 对(9.2)作傅里叶变换, 有

$$\hat{u}_t + |\xi|^2\hat{u} = G(\xi, t), \qquad (9.9)$$

其中 $\qquad G(\xi, t) = -\mathscr{F}(u, \nabla u) - \xi\mathscr{F}(p).$

这里 $\mathscr{F}$ 表示傅里叶变换. (9.9)乘以积分因子 $e^{|\xi|^2 t}$, 得

$$\frac{d}{dt}[e^{|\xi|^2 t}\hat{u}] = e^{|\xi|^2 t}G(\xi, t).$$

对 t 积分, 得

$$e^{|\xi|^2 t}\hat{u}=\hat{u}_0+\int_0^t e^{|\xi|^2 s}G(\xi,\ s)ds.$$

因此

$$|\hat{u}(\xi,\ t)|\leqslant e^{-|\xi|^2 t}\hat{u}_0(\xi)+\int_0^t e^{-|\xi|^2(t-s)}|G(\xi,\ s)|ds. \tag{9.10}$$

下面将建立估计式

$$|G(\xi,\ t)|\leqslant c|\xi|. \tag{9.11}$$

联系(9.10)、(9.11),有

$$|\hat{u}(\xi,\ t)|\leqslant e^{-|\xi|^2 t}|\hat{u}_0(\xi)|+c\int_0^t e^{-|\xi|^2(t-s)}|\xi|ds. \tag{9.12}$$

因为 $u_0\in L_1$, 故它的傅里叶变换属于 L_∞, 即有

$$|\hat{u}_0(\xi)|\leqslant c, \qquad (\forall\xi\in\mathbb{R}) \tag{9.13}$$

其中 c 是确定的常数. 利用(9.13), 由(9.12)可得

$$|\hat{u}(\xi,\ t)|\leqslant ce^{-|\xi|^2 t}+\frac{c}{|\xi|}(1-e^{-|\xi|^2 t}),$$

由此可得(9.8). 因为 $s(t)$ 的半径对 t 一致有界, (9.8)对任意紧集 K 是成立的.

为完成证明, 需要建立不等式(9.11). 为此, 我们分析 $G(\xi, t)$ 的每一项. 对于对流项, 有

$$\begin{aligned}|\mathscr{F}(u,\ \nabla u)|&=\left|\int_{\mathbb{R}^n}\operatorname{div}(u\otimes u)e^{ix\xi}d\xi\right|\\&\leqslant\sum_{i,j}\int_{\mathbb{R}^n}|u^j u^i|\,|\xi_j|dx,\end{aligned}$$

其中我们用到分部积分和 $\nabla\cdot u=0$. 因

$$|u^j u^i(\cdot,\ t)|_1\leqslant|u^j(\cdot,\ t)|_2|u^i(\cdot,\ t)|_2\leqslant|u_0|_2^2,$$

我们有

$$|\mathscr{F}(u,\ \nabla u)|\leqslant c|\xi|, \tag{9.14}$$

相应的压力项估计可从方程

$$\triangle p=-\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i\partial x_j}(u^i u^j) \tag{9.15}$$

得到. 取(9.15)的傅里叶变换, 有

$$|\xi|^2\mathscr{F}(p)=\sum_{i,j}\xi_i\xi_j\mathscr{F}(u^iu^j).$$

因为 $\mathscr{F}(u^iu^j)\in L^\infty$, 有

$$|\hat{p}|\leqslant c. \tag{9.16}$$

联合(9.14)、(9.16), 可得

$$|G(\xi,\ t)|\leqslant c|\xi|.$$

这就证得了定理1.

现考虑 f 不为 0 的情况.

定理2 设 u: $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^n$, p: $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ 为光滑函数, 且 u 在∞处消失, u 和 p 满足

$$\begin{cases}u_t+u\cdot\nabla u-\Delta u+\nabla p=f,\\ \nabla u=0,\\ u(x,\ 0)=u_0(x),\ x\in\mathbb{R}^n.\end{cases} \tag{9.17}$$

如果 $u_0\in L_1(\mathbb{R})\cap L_2(\mathbb{R}^n)$, $f\in W^{-1,1}(\mathbb{R}^n)$, $\nabla f=0$, 且

$$\|f(\cdot,\ t)\|_2\leqslant K(1+t)^{-\frac{n}{2}},$$

则

$$\|u(\cdot,\ t)\|_2^2\leqslant c(1+t)^{-\frac{n}{2}}, \tag{9.18}$$

其中常数 c 依赖于 n、k 和 $\|u_0\|_{L_1}$、$\|u_0\|_{L_2}$.

证明 能量不等式(9.4)置换为

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}|u|^2dx=-2\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2dx+\int_{\mathbb{R}^n}u\cdot fdx. \tag{9.19}$$

(9.19)对 t 积分, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n}|u|^2dx+2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2dx\,ds$$
$$=\int_{\mathbb{R}^n}|u_0|^2dx+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}u\cdot fdx\,ds. \tag{9.20}$$

我们先证明 $u(\cdot,\ t)\in L_2(\mathbb{R}^n)$. 利用施瓦兹不等式和有关 f 的假设, (9.20)右端最后一项积分为

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} u\cdot f\,dx\,ds\leqslant\int_0^t|f(\cdot,\ s)|_2\cdot|u(\cdot,\ s)|_2\,ds. \qquad (9.21)$$

令 $\alpha(T)=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|u(\cdot,\ t)|_2$, 由(6.20)和(6.21)有

$$\alpha(T)^2\leqslant c+\alpha(T)\int_0^T|f(\cdot,\ s)|_2\,ds$$

$$\leqslant c+\alpha(T)k(T+1)^{-\frac{n}{2}+1},$$

因此

$$\alpha(T)\leqslant c, \qquad (9.22)$$

其中常数仅依赖于 u_0 的 L_2 模和 k.

重复定理 1 的证明, 类似于不等式(9.7), 有

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}|^2d\xi+\frac{n}{t+1}\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}|^2d\xi$$

$$\leqslant\frac{n}{(t+1)}\int_{s(t)}|\hat{u}|^2d\xi+\int_{\mathbb{R}^n}u\cdot f\,dx,$$

其中 $s(t)$如同定理 1 中的定义. 由估计(9.22)和关于 f 的假设, 有

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}|^2\,d\xi+\frac{n}{(t+1)}\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}|^2d\xi$$

$$\leqslant\frac{n}{(t+1)}\int_{s(t)}|\hat{u}|^2\,d\xi+c(t+1)^{-\frac{n}{2}}.$$

如同定理 1 的证明, 我们需要辅助估计

$$|\hat{u}(\xi,\ t)|\leqslant c|\xi|^{-1}. \qquad (\xi\in S)$$

为此, 需要证明

$$|\hat{f}(\xi,\ t)|\leqslant c|\xi|.$$

上式直接由 $f\in W^{-1,1}$ 得到. 于是, (9.17)的解的 L_2 衰减估计由定理 1 的证明类似得到.

设(9.17)的解 $u\in L_1(\mathbb{R}^n)$, $n\geqslant1$, 则有

推论 1 设 u_0、u 和 p 满足定理 1 的一切要求, f 满足: $\nabla\cdot f=0$, $f\in W^{-1,1}$, 且

$$|f(\cdot,\ t)|\leqslant k_1(t+1)^{-(\frac{n}{2}+1)}.$$

再设$|u(\cdot, t)|_1 \leqslant k_2$，则

$$|u(\cdot, t)|_2 \leqslant c(1+t)^{-\frac{n}{2}},$$

其中常数 c 仅依赖于 k_1、k_2 和 u_0 的 L_1 和 L_2 模.

证明 重复定理 2 的证明，并用到

$$|\hat{u}(\xi, t)| \leqslant k_2.$$

现考虑三维纳维-斯托克斯方程

$$\begin{cases} u_t + u \cdot \nabla u - \Delta u - \nabla p = f, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \tag{9.24}$$

的勒雷(J. Leray)-霍普夫(E. Hopf)解的依 L_2 模的衰减，其中 $f=(f^1, f^2, f^3)$满足适当的衰减条件. 记

$H_0^1(R^3)=H_0^1$ 是 $C_0^\infty(R^3)$依模$\left(\int_{R^3} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$的闭包，

H^{-1} 是 H_0^1 的对偶空间，

$\mathscr{V} = C_0^\infty(R^3) \cap \{u : \nabla \cdot u = 0\}$，

H 是 $\mathscr{V}$ 在 $L_2(R^3)$中的闭包，

V 是 $\mathscr{V}$ 依 $H_0^1(R^3)$的闭包，

V' 是 V 的对偶空间.

先考虑$f=0$ 的情况. 我们有以下结果：

定理 3 设 $u_0 \in H \cap L_1(\mathbb{R}^3)$，则存在三维纳维-斯托克斯方程(9.24)($f=0$)具初值 u_0 的勒雷-霍普夫解 $u(x, t)$，使得

$$|u(\cdot, t)| \leqslant c(t+1)^{-\frac{1}{4}}, \tag{9.25}$$

其中常数 c 仅依赖于 u_0 的 L_1 和 L_2 模.

定理 4 设 $u_0 \in H \cap L_1(\mathbb{R}^3)$. u_N 和 p_N 满足

$$\frac{d}{dt} u_N + \psi_\delta(u_N) \nabla u_N - \Delta u_N + \nabla p_N = 0, \tag{9.26}$$

其中 $\psi_\delta(u)$为 u 的磨光函数，将在下面具体定义，则有

$$|u_N(\cdot, t)|_2 \leqslant c(t+1)^{-\frac{1}{4}}, \tag{9.27}$$

其中常数 c 仅依赖于 u_0 的 L_1 和 L_2 模.

定理 3 和定理 4 的证明需要如下引理:

引理 1 设 $f\in L_2(0, T; V')$, $u\in L_2(0, T; V)$, p 为一个分布, 且

$$u_t-\triangle u+\triangle p=f \tag{9.28}$$

依分布意义在 $D=\mathbb{R}^3\times(0, T)$上满足, 则有

$$u_t\in L_2(0, T; V'),$$

$$\frac{d}{dt}\int_{R^3}|u|^2dx=2\int_{R^3}(u_t, u)dx,$$

依分布意义下成立. 且在除去一个测度为 0 的集之外,

$$u\in C(0, T; H),$$

对于给定初值在 H 中的 $L_2(0, T; V)$的(9.28)的解是唯一的.

引理 2 设 $f\in L_2(0, T; V')$, $u_0\in H$, $w\in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\nabla w=0$, 则存在唯一的函数 u 和分布 p, 使得

$$u\in C(0, T; H)\cap L_2(0, T; V),$$

$$u_t+w\cdot\nabla u-\Delta u+\nabla p=f$$

依分布意义在 D 上成立, 且

$$u(0)=u_0(x).$$

推论 2 在引理 2 的假设下, 有

$$w\cdot\nabla u\in L_2(0, T; V'),$$

$$u_t\in L_2(0, T; V').$$

为了定义磨光函数 $\psi_\delta(x)$, 先定义函数 $\psi(x, t)$:

$$\psi(x, t)\in C^\infty,\ \psi\geqslant 0,\ \iint\psi\,dx\,dt=1,$$

$$\operatorname{supp}\psi\subset\{(x, t): |x|^2<t,\ 1<t<2\}.$$

如果 $u\in L_2(0, T; V)$, 令

$$\tilde{u}(x, t)=\begin{cases}u(x, t), & \text{如果}(x, t)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^+,\\ 0, & \text{其他点.}\end{cases}$$

定义

$$\psi_\delta(u)(x,\ t)=\delta^{-4}\iint\psi\left(\frac{y}{\delta},\ \frac{t}{\delta}\right)u(x-y,\ t-\tau)dy\,d\tau,$$

其中 $\delta=T/N$, $\varphi_\delta(u)$ 在时间 t 的值仅依赖于 u 在时间 $z\in(t-2\delta,\ t-\delta)$的值.

引理 3 对任何 $u\in L^\infty(0,\ T;\ H)\cap L_2(0,\ T;\ V)$, 有

$$\nabla\cdot\psi_\delta(u)=0,$$

$$\sup_{0<t<T}\int_{\mathbb{R}^3}|\psi_\delta(u)|^2(x,\ t)dx\leqslant C\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^2dx,$$

其中 C 为绝对常数.

引理 4 设 $f\in L_2(0,\ T;\ H^{-1}(\mathbb{R}^3))$, $\nabla\cdot f=0$, $u_0\in H$. 如 $w=\psi_\delta$, 则在引理 3 的假设下压力 p 满足

$$\Delta p=-\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i\partial x_j}(w^iu^j),$$

且 p 在 $L^{\frac{5}{3}}(R^3\times(0,\ T))$中有界, 对一切 $T>0$.

引理 5 在引理 4 的假设下, 设 u_N 为方程

$$\frac{d}{dt}u_N+\psi_\delta(u_N)\cdot\nabla u_N-\Delta u_N+\nabla p_N=f$$

的唯一解, $\delta=T/N$, 则

$$u_N\to u \text{ 依 } L^s(D)\text{强收敛},\ 2\leqslant s\leqslant\frac{10}{3},$$

$$p_N\to p \text{ 依 } L^{\frac{5}{3}}(D)\text{弱收敛},$$

$$\psi_\delta(u_N)\to u \text{ 依 } L^s(D)\text{强收敛},\ 2\leqslant s\leqslant\frac{10}{3},$$

$$\lim_{N\to\infty}u_N(0)=u,$$

且 u 是三维纳维-斯托克斯方程的勒雷-霍普夫解.

引理 1～引理 5 均在 L. Caffarelli、R. Kohn、尼伦伯格的论文[133]中证明过, 我们用这些引理和推论来证明定理 3 和定理 4.

定理 4 的证明 为方便计, 令 $u_N=u$,

$$H(t)=\int_{\mathbb{R}^3}|u|^2dx,\qquad Q(t)=\int_{\mathbb{R}^3}u\cdot u_t\,dx.$$

由引理 1、引理 2 和推论 2，有 H 和 $Q\in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. 因

$$\frac{d}{dt}H(t)=Q(t) \tag{9.29}$$

依分布意义下成立. 特别因 H 是绝对连续，(9.29)可认为在古典意义下成立. 因此，如果我们能证明

$$|\hat{u}(\xi, t)|\leqslant C|\xi|^{-1}, \qquad \xi\in S(t) \tag{9.30}$$

就可得到定理 4. 为此，我们建立估计(9.30).

命题 1 设 $u_0\in H\cap L_1(\mathbb{R}^3)$ 且 $w(\cdot,\ t)\in L_2(\mathbb{R}^3)\cap C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\nabla\cdot w=0$. 如 u 和 p 是唯一的函数，满足

$$\begin{cases} u_t+w\cdot\nabla u+\nabla p-\triangle u=0,\\ \nabla\cdot u=0,\\ u(x,\ 0)=u_0(x), \end{cases} \tag{9.31}$$

则对 $\xi\in K$, K 为一紧集，

$$|\hat{u}(\xi, t)|\leqslant C|\xi|^{-1} \text{ 几乎处处对 } t \text{ 成立.} \tag{9.32}$$

其中常数 C 依赖于 K、u_0 的 L_1 和 L_2 模、w 的 L_2 模.

证明 令

$$G(\xi,\ t)=-\mathscr{F}(p)-\mathscr{F}(w,\ \nabla u).$$

为证明命题，只需证明

$$|G(\xi,\ t)|\leqslant C|\xi|. \tag{9.33}$$

由引理 4，有

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}|p|^{\frac{5}{3}}\,dx\,ds\leqslant\text{const},$$

推出 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}|p(x,\ t)|^{\frac{5}{3}}dx\leqslant\text{const}$ 几乎处处对 t 成立.

因此，$\hat{P}(\xi,\ t)\in L_{\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^3)$ 几乎处处对 t 成立. 这是由豪斯多夫-Young 不等式得到的. 即如 $h\in L_q(\mathbb{R}^n)$, $1\leqslant q\leqslant 2$, 则

$$|\hat{h}|_{L_r}\leqslant(2\pi)^{\frac{n}{r}}|h|_{L_q}. \qquad \frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$$

为了建立 $\hat{P}(\xi,\ t)$的有界性，如同引理 4,

$$\Delta p=-\sum_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(w^iu^j),$$

对上式作傅里叶变换，得

$$|\xi|^2|p|=|\sum\xi_i\xi_j\mathscr{F}(w^iu^j)|\leqslant\sum|\xi_i\xi_j|\int_{R^3}|w^iu^j|dx.$$

因为 w^i 和 $u^j\in L_2(\mathbb{R}^3)$，则有

$$|\hat{P}|\leqslant C. \tag{9.34}$$

现来分析对流项 $\mathscr{F}(w\cdot\nabla u)$．首先证明 $(w\cdot\nabla u)\in L_2(D)$．这是引理 2 的推论，因

$$\iint_{\mathbb{R}^3}|w\cdot\nabla u^i|^2dx\,dt\leqslant\sum_{j=1}^{3}\iint_{\mathbb{R}^3}|w^j\partial x_ju^i|^2dx\,dt$$

$$\leqslant C\iint_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2dx\,dt\leqslant C.$$

因为 $\nabla\cdot w=0$，$u^i\in L_2(\mathbb{R}^3)$，有

$$|\mathscr{F}(w\cdot\nabla u^i)|=\left|\sum_{j=1}^{3}\mathscr{F}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}w^ju^i\right)\right|$$

$$\leqslant|\xi|\sum_{j=1}^{3}|\mathscr{F}(w^ju^i)|\leqslant C|\xi|. \tag{9.35}$$

联系不等式(9.34)、(9.35)，得到(9.33)．现用不等式(9.33)去证明(9.30)．作方程(9.31)的傅里叶变换，有

$$\hat{u}_t+|\xi|^2\hat{u}=G. \tag{9.36}$$

令 $v(\xi,t)=\hat{u}e^{|\xi|^2t}$，则在分布意义下有

$$v_t(\xi,t)=e^{|\xi|^2t}G(\xi,t). \tag{9.37}$$

由(9.33)可知 $e^{-|\xi|^2t}G\in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbf{R})$．因此(9.37)在古典意义下几乎处处对 t 成立，因此

$$v(\xi,t)=\hat{u}(\xi,0)+\int_0^t e^{|\xi|^2s}G(\xi,s)ds,$$

由此推出估计(9.32)成立，命题 1 得证.

为完成定理 4 的证明，在命题 1 中令 $w=\psi_\delta(u)$，再重复定理 1 的证明，即得定理 4.

利用引理 5 和引理 2, 能证明定理 3 成立.

定理 3 的证明 设 u 是由引理 5 的 u_N 依照 $L_2(D)$ 的强极限所得的勒雷-霍普夫解, 则

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}|u_N(x,\ t)-u(x,\ t)|^2dx=0.$$

由定理 4, 有

$$\begin{aligned}|u(\cdot,\ t)|_{L_2(\mathbb{R}^3)}&\leqslant|u_N(\cdot,\ t)|_{L_2(\mathbb{R}^3)}+|u(\cdot,\ t)-u_N(\cdot,\ t)|_{L_2(\mathbb{R}^3)}\\&\leqslant C(1+t)^{-\frac{1}{4}},\end{aligned}$$

其中常数 C 仅依赖于 u_0 的 L_1 和 L_2 模.

现考虑 $f\neq0$ 的情况.

推论 3 设 $u_0\in H\cap L_1(\mathbb{R}^3)$, $f\in L_2((0,\infty);V')\cap W^{-1,1}(\mathbb{R}^3)$, $\nabla\cdot f=0$, 且 $|f(t)|_{L_2(\mathbb{R}^3)}\leqslant k(1+t)^{-\frac{3}{2}}$, 则方程

$$\frac{d}{dt}u_N+\psi_\delta(u_N)\cdot\nabla u_N-\Delta u_N+\nabla p_N=f \tag{9.38}$$

的唯一解 u_N 满足

$$|u_N(\cdot,\ t)|_2\leqslant c(t+1)^{-\frac{1}{4}}, \tag{9.39}$$

其中常数 c 仅依赖于初值的 L_1 和 L_2 模以及 k.

证明 令

$$G(\xi,\ t)=\mathscr{F}(f)-\mathscr{F}(\nabla p)-\mathscr{F}(\psi_\delta(u_N)\cdot\nabla u_N).$$

为完成证明, 仅需证明

$$|G(\xi,\ t)|\leqslant c|\xi|, \tag{9.40}$$

再重复定理 4 的证明. 由

$$|\mathscr{F}(\nabla p)|+|\mathscr{F}(\psi_\delta(u_N)\cdot\nabla u_N)|\leqslant c|\xi|$$

和 $f\in W^{-1,1}(\mathbb{R}^3)$, 即可推出不等式(9.40).

推论 4 设 u_0 和 f 满足推论 3 之条件. 设 u 为方程(9.38)的解 u_N 依 L_2 模的极限所得到的三维纳维-斯托克斯方程 (9.24) 的勒雷-霍普夫解, 则

$$|u(\cdot,\ t)|_2\leqslant c(t+1)^{-\frac{1}{4}},$$

其中常数 c 仅依赖于 f 和 u_0 的 L_1 和 L_2 模.

证明 直接由引理5和推论3推得.

附注2 如对n维纳维-斯托克斯方程的近似解作出L_1一致估计,则L_2衰减率可改善为

$$|u(\cdot,t)|_2\leqslant(t+1)^{-\frac{n}{2}}.$$

§10 非线性薛定谔方程柯西问题的解的破裂现象

考虑如下非线性薛定谔方程的柯西问题

$$\begin{cases} iu_t=\Delta u+g|u|^{p-1}u, & x\in\mathbb{R}^n,\ t>0 \quad (10.1)\\ u(x,0)=u_0(x), & (10.2)\end{cases}$$

其中$g>0$, $p>1$. 众所周知,问题(10.1)、(10.2)的光滑解满足如下守恒律

$$\|u(t)\|_2=\left(\int_{R^n}|u(x,t)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}=\text{const}=\|\varphi\|_2, \quad (10.3)$$

$$\int_{R^n}\left(|\nabla u|^2-\frac{2g}{p+1}|u|^{p+1}\right)dx=\text{const}=E_0, \quad (10.4)$$

我们估计模$\|u(t)\|_{p+1}$. 由索伯列夫不等式,有

$$\|u(t)\|_{p+1}\leqslant\text{const}\|u(t)\|_2^{1-\theta}\|\nabla u(t)\|_2^\theta, \quad (10.5)$$

其中 $\frac{1}{p+1}=\theta\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)+\frac{1-\theta}{2}$, 即

$$\theta=n(p-1)/2(p+1).$$

当$n\geqslant3$时, $p+1\leqslant\frac{2n}{n-2}$,对$n=1$、2, p为任意. 由于$\|u(t)\|_2$一致有界,由(10.5)可得

$$\|u(t)\|_{p+1}^{p+1}\leqslant\text{const}\|\nabla u\|_2^{\frac{n(p-1)}{2}}. \quad (10.6)$$

现设$|E_0|<\infty$. 我们从(10.4)得到不等式

$$\|\nabla u(t)\|_2^2\leqslant|E_0|+g\text{const}\|\nabla u(t)\|_2^{\frac{n(p-1)}{2}}. \quad (10.7)$$

当$\frac{n}{2}(p-1)<2$时,即$p<\frac{4}{n}+1$,由上式可知, $\|\nabla u\|_2$是一致有界

的，因而可得到整体光滑解．对于大的初值和大的 p，就可能发生解的破裂现象．我们对于一类初值 φ，在 $E_0\leqslant 0$、$p>1+\frac{4}{n}$ 的情况下，证明了模 $\|\nabla u(t)\|_2$ 在有限时间内破裂．

为此，考虑柯西问题

$$\begin{cases} iu_t=\triangle u+F(|u|^2)u, & x\in\mathbb{R}^n,\ t>0, & (10.8)\\ u(x,\ 0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R}^n. & (10.9)\end{cases}$$

引理 1 设 $u(x,\ t)$ 为柯西问题(10.8)、(10.9)在 $0\leqslant t<t_1$ 的光滑解，则有积分等式

(i) $\|u(t)\|_2=\|\varphi\|_2$，

(ii) $\int[|\nabla u|^2-G(|u|^2)]dx=\text{const}=E_0$，

(iii) $\frac{d}{dt}\int|x|^2|u|^2dx=-4\operatorname{Im}\int r\bar{u}u_r dx,\ r=|x|$，

(iv) $\frac{d}{dt}\operatorname{Im}\int r\bar{u}u_r dx$

$$=-2\int|\nabla u|^2dx+n\int[|u|^2F(|u|^2)-G(|u|^2)]dx,$$

其中 $G(u)=\int_0^u F(s)ds$，$\bar{u}$ 表示 u 的共轭，所有积分均取在 $\mathbb{R}^n$ 上。

证明 首先，(10.8)乘以 $2\bar{u}$，取虚部，得

$$\frac{\partial}{\partial t}|u|^2=\nabla\cdot(2\operatorname{Im}\bar{u}\nabla u),$$

因此(i)成立．(10.8) 乘以 $|x|^2$，并在 $\mathbb{R}^n$ 上积分，对右端分部积分，即得(iii)．(10.8)乘以 $2\bar{u}_t$，并在 $\mathbb{R}^n$ 上积分，利用分部积分，即得(ii)．为得到(iv)，(10.8)乘以 $2r\bar{u}_r$，得

$$2ir\bar{u}_r u_t=2r\bar{u}_r\Delta u+2F(|u|^2)ru\bar{u}_r,$$

在 $\mathbb{R}^n$ 上积分，取实部，可得

$$I=II+III,$$

其中 $$I=\operatorname{Re}\left[i\int\sum_k x_k(\bar{u}_{x_k}u_t-u_{x_k}\bar{u}_t)dx\right],$$

$$II = 2\mathrm{Re}\int r\bar{u}_r \Delta u\, dx,$$

$$III = 2\mathrm{Re}\int F(|u|^2) ru\bar{u}_r\, dx.$$

分部积分和直接计算，可得

$$II = (n-2)\int |\nabla u|^2 dx,$$

$$III = -n\int G(|u|^2) dx.$$

最后，I 能写成为

$$I = \mathrm{Re}\left[i\int \sum x_k\left(\frac{\partial}{\partial t}(\bar{u}_{x_k}u) - \frac{\partial}{\partial x_k}(u\bar{u}_t)\right)dx\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\mathrm{Re}\left[i\int ru\bar{u}_r\, dx\right] + n\,\mathrm{Re}\left[i\int u\bar{u}_t\, dx\right].$$

利用(10.8)，可得

$$I = \frac{d}{dt}\mathrm{Im}\int r\bar{u}u_r\, dx + 2\int |\nabla u|^2 dx$$

$$-n\int [|u|^2 F(|u|^2) - G(|u|^2)]dx.$$

由此可得(iv)．

定理1．设 u 为柯西问题(10.8)、(10.9)的古典解，φ 是施瓦兹速降函数类．设

(i) $E_0 \leqslant 0$,

(ii) $I = \int r\bar{\varphi}\varphi_r\, dx > 0$,

(iii) 存在常数 $c_n > 1 + \dfrac{2}{n}$，使得

$$sF(s) \geqslant c_n G(s), \qquad (\forall s \geqslant 0)$$

则存在有限时间 T，使得

$$\lim_{t\to T^-} \|\nabla u(t)\|_2 = +\infty.$$

证明　记 $y = \mathrm{Im}\int r\bar{u}u_r\, dx$．由假设(ii)，$y(0) > 0$．由引理1的(iv)，有

$$\dot{y}(t)=-2\int|\nabla u|^2dx+n\int[|u|^2F(|u|^2)-G(|u|^2)]dx.$$

由假设(iii)，有

$$\dot{y}(t)\geqslant-2\int|\nabla u|^2dx+n(c_n-1)\int G(|u|^2)dx.\qquad(10.10)$$

将引理1的(ii)代替不等式(10.10)的右端最后一项，得

$$\dot{y}(t)\geqslant-2\int|\nabla u|^2dx+n(c_n-1)\left[\int|\nabla u|^2dx-E_0\right]$$

$$=[n(c_n-1)-2]\int|\nabla u|^2dx-n(c_n-1)E_0.\qquad(10.11)$$

由假设(i)，$E_0\leqslant0$. 记 $k_n=n(c_n-1)-2$. 由假设(iii)，知 $k_n>0$，则由不等式(10.11)推出

$$\dot{y}(t)\geqslant k_n\|\nabla u\|_2^2.\qquad(10.12)$$

因为 $y(0)>0$, $k_n>0$, 函数 $y(t)$ 是增加的，因而 $y(t)>0$. 由引理1的(iii)，有

$$\frac{d}{dt}\int r^2|u|^2dx=-4\,\mathrm{Im}\int r\bar{u}u_r\,dx=-4y(t)\leqslant0,$$

因此
$$\int r^2|u|^2dx\leqslant\int r^2|\varphi|^2dx\equiv d_0^2<\infty.$$

由施瓦兹不等式，有

$$|y(t)|=y(t)\leqslant c\left(\int r^2|u|^2dx\right)^{\frac12}\left(\int|u_r|^2dr\right)^{\frac12}$$

$$\leqslant d_0\|\nabla u\|_2.$$

因此，从(10.12)有微分不等式

$$\dot{y}(t)\geqslant\frac{k_n}{d_0}y^2(t)\quad 和\quad y(0)>0.$$

由此推出，在区间 $0\leqslant t\leqslant\dfrac{d_0^2}{k_ny(0)}$ 上，有

$$y(t)\geqslant\frac{y(0)d_0^2}{d_0^2-k_ny(0)t}.$$

我们有估计 $\|\nabla u(t)\|_2\geqslant y(0)d_0^2/(d_0^2-k_ny(0)t)$，因此

$$\lim_{t\to T^-}\|\nabla u(t)\|_2=+\infty,$$

其中 $T^-=d_0^2/k_n y(0)$，定理1证毕.

推论1 除了定理1的假设(i)～(iii)外，再加一个条件：存在常数 $\sigma>0$，使得

$$s^{-1}G(s)\leqslant \text{const}\cdot s^{\sigma}, \qquad (\forall s>0) \quad (10.13)$$

则 $\|u(t)\|_\infty$ 在有限时间内破裂.

证明 由假设(i)，$E_0\leqslant 0$，则由引理2的(ii)，有

$$\|\nabla u(t)\|_2^2\leqslant\int\frac{G(|u|^2)}{|u|^2}\cdot|u|^2dx\leqslant\text{const}\|u(t)\|_\infty^{2\sigma}\|\varphi\|_2^2,$$

因此，$\|u(t)\|_\infty$ 连同 $\|\nabla u(t)\|_2$ 一起破裂.

附注1 考虑初值函数 φ 具有形式

$$\varphi(x)=\exp(i|x|^2)\psi(x),$$

其中 $\psi(x)$ 是任何施瓦兹速降实函数. 直接计算，可得

$$\text{Im}\int r\bar{\varphi}\varphi_r dx=2\int r^2|\psi|^2dx.$$

因此，定理条件(ii)是成立的.

最后，我们考虑方程(10.8)具有特殊形式

$$F(s)=s^{\frac{p-1}{2}} \qquad (p>1)$$

的情况，即

$$\begin{cases} iu_t=\triangle u+|u|^{p-1}u, & (\text{其中 } x\in\mathbb{R}^n, t>0) \quad (10.14)\\ u(x,0)=\varphi(x). & (10.15)\end{cases}$$

此时，$G(|u|^2)=\int_0^{|u|^2}s^{\frac{p-1}{2}}dx=\frac{2}{p+1}|u|^{p+1}$，定理的条件(iii)要求

$$s\cdot s^{\frac{p-1}{2}}\geqslant c_n\left(\frac{2}{p+1}s^{\frac{p-1}{2}}\right) \qquad (\forall s>0)$$

对某个 $c_n>1+\frac{2}{n}$ 成立. 此时，可选取 $c_n=\frac{p+1}{2}$，使

$$\frac{p+1}{2}=c_n>1+\frac{2}{n}.$$

因此，只要 $p>1+\frac{4}{n}$ 时定理的条件(iii)就成立. 于是有

推论 2 对于柯西问题(10.14)、(10.15)的解，如满足

(i) $E_0=\int\left(|\nabla\varphi|^2-\frac{2}{p+1}|\varphi|^{p+1}\right)dx\leqslant 0$,

(ii) $\mathrm{Im}\int r\bar{\varphi}\varphi_r\,dx>0$,

(iii) $p>1+\frac{4}{n}$,

则$\|\nabla u(t)\|_2$和$\|u(t)\|_\infty$在有限时间内破裂.

推论 3 考虑柯西问题(10.14)、(10.15)，且设推论2的假设(i)～(iii)满足，则有

(i) 对任何 $q\geqslant p+1$,

$$\|u\|_q\to+\infty,\qquad t\to T^-<\infty.$$

(ii) 设 q 满足 $\frac{n}{2}(p-1)<q<p+1$，且当 $n\geqslant 3$ 时 $p<\frac{n+2}{n-2}$,

则有

$$\|u(t)\|_q\to+\infty,\qquad t\to T^-<\infty.$$

证明 为证(i)，注意到 $E_0\leqslant 0$，对 $q>p+1$ 有

$$\begin{aligned}\|\nabla u(t)\|_2^2&\leqslant\frac{2}{p+1}\|u(t)\|_{p+1}^{p+1}\\&\leqslant\frac{2}{p+1}[\|u(t)\|_2^\theta\|u(t)\|_q^{1-\theta}]^{p+1},\end{aligned}$$

其中
$$\frac{1}{p+1}=\frac{\theta}{2}+\frac{1-\theta}{q}.$$

由于$\|\nabla u(t)\|$破裂，因而$\|u(t)\|_{p+1}$和$\|u(t)\|_q$均破裂.

为证(ii)，利用索伯列夫不等式，有

$$\|u(t)\|_{p+1}\leqslant\mathrm{const}\|\nabla u(t)\|_2^\theta\|u(t)\|_2^{1-\theta},$$

其中
$$\frac{1}{p+1}=\theta\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)+\frac{1-\theta}{q},$$

即
$$\theta=\frac{2n(p+1-q)}{(p+1)[2n-q(n-2)]},\qquad q<p+1,\tag{10.16}$$

现 $E_0\leqslant 0$，由引理2的(ii)，有

$$\|\nabla u(t)\|_2\leqslant\mathrm{const}\|u(t)\|_{p+1}^{\frac{p+1}{2}}.$$

因此，从(10.15)有

$$\|u(t)\|_{p+1}\leqslant \text{const}\|u(t)\|_q^{1-\theta}\|u(t)\|_{p+1}^{\frac{(p+1)\theta}{2}}.$$

如果

$$\frac{(p+1)\theta}{2}<1, \tag{10.17}$$

则$\|u(t)\|_q$破裂. 利用θ的表达式(10.16)，可知(10.17)等价于

$$q>\frac{n}{2}(p-1),$$

证毕.

§11 某些半线性抛物型、双曲型方程解的破裂问题

下面用凸函数的方法来研究某些半线性抛物型、双曲型方程解的破裂问题.

引理1 设正的二阶连续可微函数$\psi(t)$当$t>0$时满足不等式

$$\psi''(t)\psi'(t)-(1+\alpha)(\psi')^2\geqslant -2C_1\psi\psi'-C_2\psi^2, \tag{11.1}$$

其中$\alpha>0$, C_1、$C_2\geqslant 0$, 则当$\psi(0)>0$、$\psi'(0)>-r_2\alpha^{-1}\psi(0)$、$C_1+C_2>0$时，有

$$\psi(t)\to\infty,$$

$$t\to t_1\leqslant t_2=\frac{1}{2\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\ln\frac{r_1\psi(0)+\alpha\psi'(0)}{r_2\psi(0)+\alpha\psi'(0)},$$

其中$r_1=-C_1+\sqrt{C_1^2+\alpha C_2}$, $r_2=-C_1-\sqrt{C_1^2+\alpha C_2}$.

如果$\psi(0)>0$, $\psi'(0)>0$, $C_1=C_2=0$, 则

$$\psi(t)\to\infty,\qquad t\to t_1\leqslant t_2=\frac{\psi(0)}{\alpha\psi'(0)}.$$

证明 记$\Phi(t)=\psi^{-\alpha}(t)$，则有

$$\Phi'(t)=-\alpha\frac{\psi'(t)}{\psi^{1+\alpha}(t)},$$

$$\Phi''(t)=-\alpha\frac{\psi''(t)\psi(t)-(1+\alpha)\psi''(t)^2}{\psi^{2+\alpha}(t)}.$$

由(11.1)，有

$$\Phi''(t)+2C_1\Phi'(t)-C_2\Phi(t)\equiv f(t)\leqslant 0. \tag{11.2}$$

对于 $C_1+C_2>0$ 的情况，可求出(11.2)的解为

$$\begin{aligned}\Phi(t)&=\beta_1e^{r_1t}+\beta_2e^{r_2t}\\&\quad+\frac{1}{r_1-r_2}\int_0^t f(\tau)\left[e^{r_1(t-\tau)}-e^{r_2(t-\tau)}\right]d\tau\\&\leqslant\beta_1e^{r_1t}+\beta_2e^{r_2t},\end{aligned}\tag{11.3}$$

其中 β_1、β_2 由如下代数方程组决定：

$$\begin{cases}\beta_1+\beta_2=\Phi(0),\\ \beta_1r_1+\beta_2r_2=\Phi'(0).\end{cases}$$

因此，

$$\begin{aligned}\beta_1&=(r_1-r_2)^{-1}[\Phi'(0)-r_2\Phi(0)]\\&=-(r_1-r_2)^{-1}[\alpha\psi'(0)+r_2\psi(0)]\psi^{-\alpha-1}(0)<0,\\ \beta_2&=(r_1-r_2)^{-1}[\alpha\psi(0)+r_2\psi(0)]\psi^{-\alpha-1}(0)>0.\end{aligned}$$

由此可知，当 $t_1\leqslant t_2$、$t\to t_1$ 时，$\Phi(t)\to 0$，即 $\psi(t)\to\infty$。当 $C_1=C_2=0$ 时，引理的结论直接由(11.2)推出。证毕。

在希尔伯特空间 H 上考虑如下抛物型方程的柯西问题：

$$pu_t=-Au+Bu+\mathscr{F}(t,\ u),\tag{11.4}$$

其中算子 p，A，B: $H\to H$。A 是线性对称算子，p 是正算子，A 是非负算子。$\mathscr{F}(t,\ u)$为非线性算子。因为$\mathscr{F}$对固定 t 为弗雷歇(N. R. Frechet)可微，存在线性泛函 $G(t,\ u)$，使

$$\frac{d}{d\tau}G(t,\ u(\tau))=(\mathscr{F}(t,\ u(\tau)),\ u_\tau(\tau)).$$

此外，设 $G(t,\ u)$光滑依赖于 t，成立以下关系

$$\frac{d}{dt}G(t,\ u(t))=(\mathscr{F}(t,u(t)),\ u_t(t))+G_t(t,\ u(t)),$$

函数 $u(t)$光滑依赖于 t。我们关心方程(11.4)的解当 t 增加时的状态。为简单计，设(11.4)的古典解存在，设

$$\|p^{-\frac{1}{2}}Bu\|\leqslant M_1\|A^{\frac{1}{2}}u\|+M_2\|p^{\frac{1}{2}}u\|\tag{11.5}$$

和

$$(\mathscr{F}(t, u), u) \geqslant 2(1+\alpha_1)G(t, u), \qquad \alpha_1>0 \quad (11.6)$$

且

$$G_t(t, u) \geqslant M_3(\mathscr{F}(t, u), u), \qquad (11.7)$$

$$M_3=\frac{1+\alpha_1}{\alpha_1-\beta}\cdot\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\cdot\frac{M_1^2}{4},$$

其中 $\beta\in(0, \alpha_1)$, $\varepsilon\in(0, 1)$.

定理1 设 p, A, B, $\mathscr{F}$ 和(11.4)的解 $u(t)$ 满足前面提到的要求, 此外 $u_0=u(0)$, $B_0=\|p^{\frac{1}{2}}u_0\|>0$ $(u_0\neq 0)$,

$$A_0>\frac{(1+\alpha)^2\delta}{4\alpha(\alpha_1+1)}B_0, \qquad (11.8)$$

其中

$$A_0=-\frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}}u_0\|^2-\frac{M_3}{2}B_0+G(0, u_0),$$

$$\alpha=-1+\sqrt{1+\beta},\ \alpha_1=-\gamma_2/\alpha;\ \gamma_{1,2}=-c_1\pm\sqrt{c_1^2+\alpha c_2},$$

$$c_1=\frac{M_1^2}{4\alpha_1}+M_2, \qquad c_2=4(1+\alpha_1)M_4,$$

$$M_4=M_3\left(\frac{M_1^2}{4\varepsilon}+M_2\right)+\frac{M_2^2}{4}\frac{(1+\alpha_1)}{\alpha_1-\beta}\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon},$$

则

$$\|p^{\frac{1}{2}}u\|\to\infty,$$

$$t\to t_1\leqslant t_2=\frac{1}{2\sqrt{c_1^2+\alpha c_2}}\ln\frac{4\alpha^2(\alpha_1+1)A_0+\gamma_1(1+\alpha)^2B_0}{4\alpha^2(\alpha_1+1)A_0+\gamma_2(1+\alpha)^2B_0}.$$

当 $B\equiv 0$ 时, $M_1=M_2=M_3=M_4=c_1=c_2=\gamma_{1,2}=\delta=0$, 条件(11.7)具有形式

$$G_t(t, u)>0,$$

条件(11.8)为

$$-\frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}}u_0\|^2+G(0, u_0)>0.$$

证明 (11.4)与 u 作内积, 得

$$(pu_t, u)=\frac{1}{2}(\|p^{\frac{1}{2}}u\|)_t=-\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2+(Bu, u)+(\mathscr{F}(t, u), u). \tag{11.9}$$

(11.4)与 u_t 作内积，得

$$\begin{aligned}\|p^{\frac{1}{2}}u_t\|^2&=-(Au, u_t)+(Bu, u_t)+(\mathscr{F}(t, u), u_t)\\&=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2+(Bu, u_t)\\&\quad+\frac{d}{dt}G(t, u)-G_t(t, u).\end{aligned} \tag{11.10}$$

令 $j(t)=-\frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2+G(t, u)$，由(11.5)、(11.6)以及(11.9)可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|p^{\frac{1}{2}}u\|^2&\geqslant-\|A^{\frac{1}{2}}u\|-\|p^{-\frac{1}{2}}Bu\|\|p^{\frac{1}{2}}u\|+2(\alpha_1+1)G(t, u)\\&\geqslant2(\alpha_1+1)j(t)+\alpha_1\|A^{\frac{1}{2}}u\|\\&\quad-M_1\|A^{\frac{1}{2}}u\|\|p^{\frac{1}{2}}u\|-M_2\|p^{\frac{1}{2}}u\|^2\\&\geqslant2(\alpha_1+1)j(t)-c_1\|p^{\frac{1}{2}}u\|^2,\end{aligned} \tag{11.11}$$

其中 $c_1=\frac{M_1^2}{4\alpha_1}+M_2$. 另一方面，由(11.10)和(11.5)可得 $j(t)$ 随 t 的变化：

$$\begin{aligned}\frac{dj(t)}{dt}&\geqslant\|p^{\frac{1}{2}}u_t\|^2-\|p^{-\frac{1}{2}}Bu\|\|p^{\frac{1}{2}}u_t\|+G_t(t, u)\\&\geqslant(1-\varepsilon_1)\|p^{\frac{1}{2}}u_t\|-\frac{1}{4\varepsilon_1}\|p^{-\frac{1}{2}}Bu\|+G_t(t, u)\\&\geqslant(1-\varepsilon_1)\|p^{\frac{1}{2}}u_t\|-\frac{M_1^2}{4\varepsilon_1}(1+\varepsilon_1)\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2\\&\quad-\frac{M_2^2}{4\varepsilon_1}\left(1+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\|p^{\frac{1}{2}}u\|^2+G_t(t, u),\end{aligned} \tag{11.12}$$

其中 ε_1、$\varepsilon_2>0$. 由(11.9)对 t 的积分，可得：($\forall\varepsilon_2>0$)

$$\frac{1}{2}\|p^{\frac{1}{2}}u(t)\|+\int_0^t\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2d\tau$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\|p^{\frac{1}{2}}u_0\|^2+\int_0^t(Bu,\ u)d\tau+\int_0^t(\mathscr{F},\ u)d\tau$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\|p^{\frac{1}{2}}u_0\|^2+\int_0^t\|p^{\frac{1}{2}}Bu\|\|p^{\frac{1}{2}}u\|d\tau+\int_0^t(\mathscr{F},\ u)d\tau$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\|p^{\frac{1}{2}}u_0\|^2+\varepsilon_3\int_0^t\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2d\tau+\frac{M_1^2}{4\varepsilon_3}\int_0^t\|p^{\frac{1}{2}}u\|^2d\tau$$

$$+M_2\int_0^t\|p^{\frac{1}{2}}u\|^2d\tau+\int_0^t(\mathscr{F},\ u)d\tau.$$

由此可得

$$(1-\varepsilon_3)\int_0^t\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2d\tau$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\|p^{\frac{1}{2}}u_0\|^2+\left(\frac{M_1^2}{4\varepsilon_3}+M_2\right)\int_0^t\|p^{\frac{1}{2}}u\|^2d\tau+\int_0^t(\mathscr{F},\ u)d\tau. \tag{11.13}$$

(11.12)对 t 从 0 到 t 积分，用(11.13)可得：($\varepsilon_3\in(0,\ 1)$)

$$j(t)\geqslant j(0)+(1-\varepsilon_1)\int_0^t\|p^{\frac{1}{2}}u\|^2d\tau$$

$$-\left[\frac{M_1^2}{4\varepsilon_1(1-\varepsilon_3)}(1+\varepsilon_3)\left(\frac{M_1^2}{4\varepsilon_3}+M_2\right)\right.$$

$$\left.+\frac{M_2^2}{4\varepsilon_1}\left(1+\frac{1}{\varepsilon_2}\right)\right]$$

$$\times\int_0^t\|p^{\frac{1}{2}}u\|^2d\tau-\frac{M_1^2}{8\varepsilon_1(1-\varepsilon_1)}(1+\varepsilon_1)\|p^{\frac{1}{2}}M_0\|^2$$

$$+\int_0^t\left[G_t(t,\ u)-\frac{M_1^2}{4\varepsilon_1(1-\varepsilon_3)}(1+\varepsilon_1)(\mathscr{F},\ u)\right]d\tau. \tag{11.14}$$

选取 $\varepsilon_1=(\alpha_1-\beta)/(1+\alpha_1)$，$\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon$，$\varepsilon\in(0,\ 1)$，$\beta\in(0,\ \alpha_1)$，则由(11.14)可得估计

$$j(t)\geqslant\frac{1+\beta}{1+\alpha_1}\int_0^t\|p^{\frac{1}{2}}u_\tau\|^2d\tau-M_4\int_0^t\|p^{\frac{1}{2}}u\|^2d\tau+A_0, \tag{11.15}$$

其中

$$M_4=M_3\left(\frac{M_1^2}{4\varepsilon}+M_2\right)+\frac{M_2^2}{4}\frac{1+\alpha_1}{(\alpha_1-\beta)}\cdot\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon},$$

$$A_0=j(0)-\frac{M_3}{2}\|p^{\frac{1}{2}}u_0\|^2.$$

从(11.11)和(11.15)可得

$$\frac{d}{dt}\|p^{\frac{1}{2}}u\|^2\geqslant 4(1+\beta)\int_0^t\|p^{\frac{1}{2}}u_\tau\|^2d\tau+4(\alpha_1+1)$$

$$\times\left[A_0-M_4\int_0^t\|p^{\frac{1}{2}}u\|^2d\tau\right]-2c_1\|p^{\frac{1}{2}}u\|^2. \qquad (11.16)$$

令 $\psi(t)=\int_0^t\|p^{\frac{1}{2}}u(\tau)\|^2d\tau+c_3$，其中常数 c_3 和 u_0 待定，使之满足引理1条件．令

$$\int_0^t\|p^{\frac{1}{2}}u\|^2d\tau=A_1,\qquad \int_0^t\|p^{\frac{1}{2}}u_\tau\|^2d\tau=A_2,$$

则：$(\forall\varepsilon_4>0)$

$$\|p^{\frac{1}{2}}u(t)\|^4=(\|p^{\frac{1}{2}}u_0\|^2+2\int_0^t(pu,\ u_\tau)d\tau)^2$$

$$\leqslant(\|p^{\frac{1}{2}}u_0\|^2+2\sqrt{A_1A_2})^2$$

$$\leqslant\left(1+\frac{1}{\varepsilon_4}\right)\|p^{\frac{1}{2}}u_0\|^4+4(1+\varepsilon_4)A_1A_2.$$

由这个估计式和不等式(11.16)，有

$$\psi''(t)\psi(t)-(1+\alpha)\psi'(t)^2$$

$$\geqslant 4(1+\beta)A_2(A_1+C_3)[4(\alpha_1+1)(A_0-M_4\psi+M_4C_3)$$

$$-2C_1\psi']\psi-(1+\alpha)\left(1+\frac{1}{\varepsilon_4}\right)\|p^{\frac{1}{2}}u_0\|^4$$

$$-4(1+\alpha)(1+\varepsilon_4)A_1A_2. \qquad (11.17)$$

选取 $\varepsilon_4=\alpha$，$(1+\alpha)=(1+\beta)$，则由(11.17)可得

$$\psi''(t)\psi(t)-(1+\alpha)\psi'(t)^2$$

$$\geqslant-2C_1\psi'(t)\psi(t)-4(\alpha_1+1)M_4\psi^2(t)$$

$$+\left\{4(\alpha_1+1)(A_0+M_4C_3)C_3-\frac{(1+\alpha)^2}{2}\|p^{\frac{1}{2}}u_0\|^4\right\}. \qquad (11.18)$$

为应用引理 1，必须满足条件

$$4(\alpha_1+1)(A_0+M_4C_3)C_3-\frac{(1+\alpha)^2}{\alpha}\|p^{\frac{1}{2}}u_0\|^4\geqslant 0, \qquad (11.19)$$

$$\psi'(0)>\delta\psi(0), \quad \delta=-\alpha^{-1}\gamma_2, \quad \delta\geqslant 0. \qquad (11.20)$$

令 $\psi'(0)=\|p^{\frac{1}{2}}u_0\|^2$，$A_0>0$，则当

$$C_3=\frac{(1+\alpha)^2}{4\alpha(\alpha_1+1)}\frac{\|p^{\frac{1}{2}}u_0\|^4}{A_0}$$

时，(11.19)成立．为满足(11.20)，由定理条件(11.8)，有

$$\delta\psi(0)=\delta C_3=\frac{(1+\alpha)^2\delta}{4\alpha(\alpha_1+1)}\cdot\frac{\|p^{\frac{1}{2}}u_0\|^4}{A_0}<\|p^{\frac{1}{2}}u_0\|^2=\psi'(0),$$

因此定理得证．

定理 2 设定理 1 条件满足，其中条件(11.7)置换为

$$G_t(t, u)\geqslant 0, \quad 2\alpha_1\lambda G(t, u)\geqslant M_3(\mathscr{F}(t, u), u), \qquad (11.21)$$

其中 $\lambda>0$，且设 B 为线性算子，则定理 1 的结论成立．

证明 令 $v(t)=u(t)e^{-\lambda t}$，$\lambda>0$，从方程(11.4)推出，$v(t)$ 满足如下方程

$$Pv_t=-\widetilde{A}v+\widetilde{B}v+\mathscr{F}(t, v), \qquad (11.22)$$

其中 $\widetilde{A}=A+\lambda P$，$\widetilde{B}=B$，$\widetilde{\mathscr{F}}(t, v)=e^{-\lambda t}\mathscr{F}(t, e^{\lambda t}v)$．容易验证定理 1 的条件满足．显然，

$$\widetilde{A}>0, \quad \|\widetilde{A}^{\frac{1}{2}}\|^2=(\widetilde{A}v, v)=\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2+\lambda\|P^{\frac{1}{2}}v\|^2.$$

由此推出 $\widetilde{B}$ 的条件(11.5)满足，且具有常数 M_1、M_2．令 $\widetilde{G}(t, v)=e^{-2\lambda t}G(t, e^{\lambda t}v)$，则

$$\frac{d}{dt}\widetilde{G}(t, v(\tau))=e^{-2\lambda t}(\mathscr{F}(t, e^{\lambda t}v(\tau)), e^{\lambda t}v_\tau(\tau))$$
$$=(\widetilde{\mathscr{F}}(t, v), v_\tau), \qquad (11.23)$$

要求

$$(\widetilde{\mathscr{F}}(t, v), v)\geqslant 2(1+\alpha_1)\widetilde{G}(t, v), \qquad (11.24)$$

因此假设(11.6)满足．为了证明满足不等式

$$\widetilde{G}_t(t, v)\geqslant M_3(\widetilde{\mathscr{F}}(t, v), v),$$

我们利用(11.22)、(11.23)，有

$$
\begin{aligned}
\widetilde{G}(t, v) &= e^{-2\lambda t}G_t(t, e^{\lambda t}v) - 2\lambda e^{-2\lambda t}G(t, e^{\lambda t}v) \\
&\quad + e^{-2\lambda t}(\mathscr{F}(t, e^{\lambda t}v(t)), \lambda e^{\lambda t}v) \\
&\geqslant -2\lambda\widetilde{G}(t, v) + \lambda(\widetilde{\mathscr{F}}(t, v), v) \\
&\geqslant 2\lambda\alpha_1\widetilde{G}(t, v) \geqslant M_3(\widetilde{\mathscr{F}}(t, v), v),
\end{aligned}
$$

因此方程(11.22)满足定理1的一切条件. 至于初始条件，由于 $v(0)=u(0)$，因此得到 $v(t)$. 于是 $u(t)$ 的破裂性定理成立.

作为定理2的一个例子，我们研究如下形式的抛物型方程的初值问题

$$
\begin{cases}
u_t = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)u_{x_i}) + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x, t)u_{x_j} + a_0(x, t)u + Cu^m, & (11.25) \\
u|_{\partial\Omega} = 0, \ u|_{t=0} = u_0(x), \ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n. & (11.26)
\end{cases}
$$

取希尔伯特空间 H 为 $L_2(\Omega)$，在 $Q_T=\Omega\times[0, T]$ 上满足以下不等式

$$
\nu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \leqslant a_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \mu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2, \ a_{ij}=a_{ji}, \ |a_i| = \mu_i, \ |a_0-\nu| \leqslant \mu_2,
$$

$$
|a_{ijt}\xi_i\xi_j| \leqslant \mu_2\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2.
$$

易知微分表示 $-\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\dfrac{\partial}{\partial x_j}+\nu I\right)$ 在边界条件(11.26)下是自共轭的正算子，记为 $A(t)$. 对于它，有

$$
(Au, u) = \|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 \geqslant \nu\|u\|_1^2 = \nu\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2 + u^2\right)dx.
$$

此外

$$
|(A_t u, u)| = \int_\Omega a_{ijt}u_{x_i}u_{x_j}\,dx \leqslant \frac{\mu_2}{\nu}\|A^{\frac{1}{2}}u\|,
$$

即

$$
\|(A_t u, u)\| \leqslant M_1'\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 + M_2'\|P^{\frac{1}{2}}u\|^2,
$$

其中 $M_1=\sqrt{\mu\nu^{-1}}$. 以 B 表示 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}-\nu I$，则有

$$
\|Bu\|^2 \leqslant (n+1)\mu_1\|u\|_1^2 \leqslant \frac{(n+1)\mu_1}{\nu}\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2,
$$

即条件(11.5)满足，其中 $M_1=\sqrt{(n+1)\mu_1\nu^{-1}}$，$\mathscr{F}(t,\ u)=Cu^m$，因而 $G(t,\ u)=\frac{C}{m+1}\int_\Omega u^{m+1}dx$. 推之，

$$(\mathscr{F}(t,\ u),\ u)=C\int_\Omega u^{m+1}dx=\frac{1}{m+1}G(t,\ u),$$

则条件(11.6)满足，其中 $2(1+\alpha_1)=m+1$. 条件(11.21)满足，其中 $\lambda=\frac{M_3}{(m+1)2\alpha_1}$，$M_3$ 为(11.7)所确定. 则定理2的一切假定满足. 因而当 $C>0,\ m>1$ 时，问题(11.1)、(11.2)的解 $u(t)$ 在有限时间内破裂.

现考虑双曲方程的情况. 设有如下双曲型方程

$$Pu_{tt}=-Au+Bu-Pu_t+\mathscr{F}(t,\ u), \tag{11.27}$$

其中 P、A 是线性对称算子，$P>0$, $A>0$, B 算子可能是非线性的，满足

$$\|P^{-\frac{1}{2}}Bu\|\leqslant M_1\|A^{\frac{1}{2}}u\|, \tag{11.28}$$

其中 $a>0$ 为实数，非线性项 $\mathscr{F}(t,\ u)$ 具有位势 $G(t,\ u)$，且满足

$$(\mathscr{F}(t,\ u),\ u)\geqslant 2(1+2\alpha)G(t,\ u).\quad(\alpha>0) \tag{11.29}$$

此外，设 $G(t,\ u)$ 满足

$$G_t(t,\ u)\geqslant M_1G(t,\ u). \tag{11.30}$$

定理3 设前面所提假设均满足，且方程(11.13)的初值满足如下不等式

$$\begin{aligned}&2(Pu(0),\ u_t(0))\\&\quad=\psi'(0)>\frac{\alpha}{4}[a+\sqrt{a^2+2M_1^2}]\,\|P^{\frac{1}{2}}u(0)\|^2\\&\quad\quad=\frac{\alpha}{4}[a+\sqrt{a^2+2M_1^2}]\psi(0),\end{aligned} \tag{11.31}$$

$$-\frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}}u(0)\|^2-\frac{1}{2}\|P^{\frac{1}{2}}u_t(0)\|^2+G(0,\ u(0))>0, \tag{11.32}$$

则
$$\|P^{\frac{1}{2}}u(t)\|\to\infty,\qquad t\to t_1\leqslant t_2,$$

$$t_2=\frac{2}{\sqrt{a^2+2M_1^2}}\ln\frac{-\frac{1}{4}(a-\sqrt{a^2+2M_1^2})}{-\frac{1}{4}(a+\sqrt{a^2+2M_1^2})}$$

$$\times\frac{\psi(0)+\alpha\psi'(0)}{\psi(0)+\alpha\psi'(0)}. \tag{11.33}$$

证明 令 $\psi(t)=\|P^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2$, 容易看到 $\psi(t)$ 满足引理 1 的条件. 事实上,

$$\psi'(t)=2(P^{\frac{1}{2}}u,\ P^{\frac{1}{2}}u),\quad \psi''(t)=2\|P^{\frac{1}{2}}u\|^2+2(P_{tt},\ u),$$

$$\psi''(t)\psi-(1+\alpha)\psi'(t)^2$$

$$=4(1+\alpha)[\|P^{\frac{1}{2}}u_t\|^2+\|P^{\frac{1}{2}}u\|^2-(P^{\frac{1}{2}}u,\ P^{\frac{1}{2}}u_t)^2]$$

$$+2\psi[(Pu_{tt},\ u)-(1+2\alpha)\|P^{\frac{1}{2}}u_t\|^2]\geqslant 2\psi y, \tag{11.34}$$

其中 $$y(t)=(Pu_{tt},\ u)-(1+2\alpha)\|P^{\frac{1}{2}}u_t\|^2.$$

利用(11.27)~(11.29),估计 $y(t)$ 的下界:

$$y(t)=-\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2+(P^{-\frac{1}{2}}Bu,\ P^{\frac{1}{2}}u)-a(Pu_t,\ u)$$

$$+(\mathscr{F}(t,\ u),\ u)-(1+2\alpha)\|P^{\frac{1}{2}}u_t\|^2$$

$$\geqslant 2(1+2\alpha)\left[-\frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2-\frac{1}{2}\|P^{\frac{1}{2}}u_t\|^2+G(t,\ u)\right]$$

$$+2\alpha\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2-M_1\|A^{\frac{1}{2}}u\|\|P^{\frac{1}{2}}u\|$$

$$-\frac{a}{2}\frac{d}{dt}\|P^{\frac{1}{2}}u\|^2, \tag{11.35}$$

令 $$j(t)=-\frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2-\frac{1}{2}\|P^{\frac{1}{2}}u_t\|^2+G(t,\ u),$$

由(11.25)得出估计: $(\forall\varepsilon_1>0)$

$$y(t)\geqslant 2(1+2\alpha)j(t)+2\alpha\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2-\varepsilon_1\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2$$

$$-\frac{M_1^2}{4\varepsilon_1}\|P^{\frac{1}{2}}u\|^2-\frac{a}{2}\frac{d}{dt}\|P^{\frac{1}{2}}u\|^2.$$

取 $\varepsilon_1=2\alpha$, 则

$$y(t) \geqslant 2(1+2\alpha) j(t) - \frac{M_1^2}{\gamma\alpha} \|P^{\frac{1}{2}} u\|^2 - \frac{a}{2} \frac{d}{dt} \|P^{\frac{1}{2}} u\|^2. \tag{11.36}$$

另一方面，以 u_t 乘(11.27)，利用(11.5)，可得

$$\frac{d}{dt}\left[-\frac{1}{2}\|P^{\frac{1}{2}} u\|^2 - \frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}} u\|^2 + G(t, u)\right]$$

$$= -(P^{-\frac{1}{2}} Bu, P^{\frac{1}{2}} u_t) + a\|P^{\frac{1}{2}} u_t\|^2 + G(t, u)$$

$$\geqslant -M_1 \|A^{\frac{1}{2}} u\| \|P^{\frac{1}{2}} u_t\| + G_t(t, u)$$

$$\geqslant -\frac{M_1}{2}\|A^{\frac{1}{2}} u\|^2 - \frac{M_1}{2}\|P^{\frac{1}{2}} u_t\|^2 + G_t(t, u). \tag{11.37}$$

由(11.37)和(11.30)，有

$$\frac{d}{dt} j(t) \geqslant M_1 j(t) + G_t(t, u) - M_1 G(t, u)$$

$$\geqslant M_1 j(t). \tag{11.38}$$

由条件 $j(0)>0$，则 $j(t)>0$. 因此，由(11.34)、(11.36)，得

$$y(t) \geqslant -\frac{M_1^2}{8\alpha} \psi(t) - \frac{a}{2} \psi'(t)$$

和
$$\psi''\psi - (1+\alpha)\psi'(t)^2 \geqslant -\frac{M_1^2}{8\alpha} \psi^2 - \frac{a}{2} \psi'\psi.$$

注意到假设(11.33)，因此 $\psi(t)$满足引理 1 要求的条件，由此得到定理的结论.

附注 1 条件(11.29)、(11.30) 并不要求 $(\mathscr{F}(t, u), u)$ 或 $G(t, u)$的正性，且条件(11.30)的常数 M_1 可取任意大的数.

定理 3 可以推广到更一般的情况：算子 A、B 和 Pu_t 的系数 a 可依赖于 t，不过此时 $A(t)$ 和 $a(t)$应满足如下条件

$$|(A_t u, u)| \leqslant M_1^* \|A^{\frac{1}{2}} u\|^2, \qquad 0 \leqslant a(t) \leqslant a. \tag{11.39}$$

如果将不等式(11.37)置换为

$$\frac{dj(t)}{dt} \geqslant -M_1 \|A^{\frac{1}{2}} u\| \|P^{\frac{1}{2}} u_t\| - M_1^* \|A^{\frac{1}{2}} u\|^2 + G(t, u)$$

$$\geqslant -\varepsilon_1\|P^{\frac{1}{2}}u_t\|^2-\left(\frac{M_1^2}{4\varepsilon_2}+M_1^*\right)\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2+G_t(t,\ u),$$

(11.40)

取 $\varepsilon_2=\dfrac{M_1^2}{4\varepsilon_2}+M_1^*$，即

$$\varepsilon_2=\frac{M_1^*+\sqrt{M_1^*+M_1^2}}{2},$$

则不等式(11.38)成立．其中 M_1 置换为 $M_1'=M_1^*+\sqrt{M_1^*+M_1^2}$，再将(11.30)中的 M_1 换为 M_1'，则定理 3 成立．

定理 4 设定理 3 的一切条件都满足，条件(11.30)中的 M_1 换成 M_1'．设算子 A、B 和 Pu_t 的系数依赖于 t，且 $A_t(t)$ 和 $a(t)$ 满足条件(11.39)，则定理 3 的结论成立．

现研究如下双曲型方程

$$Pu_{tt}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x,t)u_{x_j})+\sum_{i=1}^{n}a_i(x,\ t)u_{x_i}$$
$$+a_i(x,\ t)u+\mathscr{F}(t,\ u), \qquad (11.41)$$

其中 P 是任意正算子，非线性项 $\mathscr{F}(t,\ u)$ 满足条件(11.29)、(11.30)．

我们现在证明(11.30)可以放宽为

$$G_t(t,\ u)\geqslant 0. \qquad (11.42)$$

令 $v(t)=u(t)e^{-\lambda t}$，则 $v(t)$ 满足方程

$$Pv_{tt}=\tilde{A}v+\tilde{B}v+\tilde{C}v_t+\tilde{\mathscr{F}}(t,\ v), \qquad (11.43)$$

其中 $\tilde{A}=A+\lambda^2P$，$\tilde{B}=B$，$\tilde{C}=-\tilde{a}P$，$\tilde{a}=a+2\lambda$，

$$\tilde{\mathscr{F}}=e^{-\lambda t}\mathscr{F}(t,\ e^{\lambda t}v).$$

对于 P、$\tilde{A}$、$\tilde{B}$，(11.28)满足．对于非线性项 $\tilde{\mathscr{F}}(t,\ v)$，它的位势 $\tilde{G}(t,\ v)=e^{-2\lambda t}G(t,\ e^{\lambda t}v)$ 满足不等式(11.39)．如前表示，

$$\tilde{G}_t(t,\ v)=e^{-2\lambda t}G_t(t,\ e^{\lambda t}v)-2\lambda\tilde{G}(t,\ v)+\lambda(\tilde{\mathscr{F}}(t,\ v),\ v).$$

如果 G 满足条件(11.29)和(11.42)，则

$$\tilde{G}_t(t,\ v)\geqslant 4\alpha\lambda\tilde{G}(t,\ v).$$

选取 $\lambda=\frac{M_1}{4\alpha}\left(\text{在定理 4 中}, \lambda\geqslant\frac{M_1'}{4\alpha}\right)$, 则条件(11.30)满足. 为使(11.43) 的解 $v(t)$ 满足定理 3 的条件, 要求 $v(0)$ 和 $v_t(0)$ 满足(11.31)和(11.32). 因为 $v(0)=u(0)$, $v_t(0)=u_t(0)-\lambda u(0)$, 为此要求 $u(0)$ 和 $u_t(0)$满足

$$2(P(0),\ u_t(0))>(2\lambda+M_2)\|P^{\frac{1}{2}}u(0)\|^2, \tag{11.44}$$

$$-\frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}}u(0)\|^2-\frac{1}{2}\|P^{\frac{1}{2}}u_t(0)-\lambda P^{\frac{1}{2}}u(0)\|^2 +G(0,\ u(0))\geqslant 0, \tag{11.45}$$

其中 $M_2=\frac{\alpha}{4}M_1\sqrt{2}$. 条件(11.45)能换成更简单的条件:

$$-\frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}}u(0)\|^2-\frac{1}{2}\|P^{\frac{1}{2}}u_t(0)\|^2 +\frac{\lambda}{2}(\lambda+M_2)\|P^{\frac{1}{2}}u(0)\|^2+G(0,\ u(0))\geqslant 0. \tag{11.46}$$

由此我们可以得到

定理 5 设除条件(11.30)外, 满足定理 3 或定理 4 的所有条件, 且满足条件(11.42)、(11.44)、(11.45)或(11.46), $\lambda>\frac{M_1}{4\alpha}\left(\text{在定理 4 中}, \lambda>\frac{M_1'}{4\alpha}\right)$, 则有

$$\|P^{\frac{1}{2}}u(t)\|\rightarrow\infty, \qquad t\rightarrow t_1\leqslant t_2, \tag{11.47}$$

$$t_2=\frac{\sqrt{2}}{M_1}\ln\frac{M_1\sqrt{2}\psi(0)+4\alpha\psi'(0)}{-M_1\sqrt{2}\psi(0)+4\alpha\psi'(0)}.$$

现举几个例子.

[例 1] 研究广义布森内斯克方程

$$u_{tt}=u_{xx}-C_1u_{xxxx}+C_2(u^m)_{xx}, \qquad (C_1\geqslant 0) \tag{11.48}$$

其中当 $m=2k+1$, $k\geqslant 1$ 时, $C_2<0$; 当 $m=2k$, $k\geqslant 1$ 时, $C_2\geqslant 0$ (若 m 为整数, 则 u^m 可由 $|u|^{m-1}u$ 代替, $m>1$, C_2 是负的). 研究初边值问题

$$u|_{t=0}=u_0(x), \qquad u_t|_{t=0}=u_1(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant 1 \tag{11.49}$$

$$u|_{x=0}=u|_{x=1}=0, \tag{11.50}$$

$$u_{xx}|_{x=0}=u_{xx}|_{x=0}=0. \tag{11.51}$$

已知算子 $-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ 满足(11.50)，为正定算子．用 P 表示其逆算子，即 $P(v_{xx})=u$, $P(v_{xxxx})=-u_{xx}$．其中 v 满足条件(11.50)，u 满足(11.51)，问题(11.48)、(11.50)、(11.51)能写成如下形式

$$Pu_{tt}=-u+C_1u_{xx}-C_2u^m, \tag{11.52}$$

此时方程(11.52)能直接应用定理 4．其中

$$A=-C_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}+I,\ B=0,\ a=0,\ \mathscr{F}(t,\ u)=-C_2u^m.$$

由于算子 $-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ 是正算子，非负定的，因此算子 P 是非负的．如果 $C_1<0$, $C_2=0$，则问题(11.48)～(11.51)不具有光滑解．

[例 2] 方程

$$u_{tt}=\pm(u_x^m)_x \tag{11.53}$$

对任何 m 具有无穷多个守恒律

$$\int[u_{tt}\mp(u_x)_x^m]u_t^k\,dx=0, \qquad k=1,\ 2,\ \cdots$$

和

$$\int[u_{tt}\mp(u_x^m)_x]u_x^n\,dx=0.$$

其中三个是

$$I_1=\int\left[\frac{1}{2}u_t^2\pm\frac{1}{m+1}u_x^{m+1}\right]dx,$$

$$I_2=\int\left[\frac{1}{3}u_t^3\pm\frac{2}{m+1}u_tu_x^{m+1}\right]dx,$$

$$I_3=\int\left[\frac{1}{4}u_t^4\pm\frac{1}{m+1}u_t^2u_x^{m+1}\right.$$

$$\left.+\frac{6}{2(2m+1)(m+1)(2m+3)}u_x^{2m+3}\right]dx.$$

方程(11.52)具有形式

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\delta H}{\delta u} \\ \frac{\delta H}{\delta v} \end{pmatrix},$$

$$H(u, v) = \int\left[-\frac{2}{m+1} u_x^{m+1} + v^2\right]dx,$$

其中 $v=u_t$. 对于方程(11.53),其右端当 m 是$\geqslant 2$的偶数时,在任意符号下,或 m 为 >2 的奇数时,具负符号下,无论柯西问题或边值问题,均出现破裂现象. 实际上,此时方程具有形式

$$Pu_{tt} = -Au - Bu - \alpha Pu_t + \hat{\mathscr{F}}(t, u), \tag{11.54}$$

其中 $P=I$, $A=0$, $B=0$, $\hat{\mathscr{F}}(t, u)=\mathscr{D}^*F(Du)$, $\mathscr{D}=\frac{\partial}{\partial x}$, $\mathscr{D}^*=-\frac{\partial}{\partial x}$, $\mathscr{F}(t, v)=\mp v^m$. 而对方程(11.54),当

$$\hat{\mathscr{F}}(t, u) = \mathscr{D}^*\mathscr{F}(t, Du) \tag{11.55}$$

时,其中 $\mathscr{D}^*$ 是 $\mathscr{D}$ 的共轭算子, $\mathscr{D}$ 为任意线性算子, $\mathscr{F}(t, v)$满足定理 5 条件,则定理 5 的结论仍然成立. 扎布斯基(N. J. Zabusky)方程

$$u_{tt} = -u_{xxxx} - u_{xx} \mp (u_x^2)_x \tag{11.56}$$

满足定理 5 的一切条件及推广条件(11.45),因而满足定理 5 的结论,其中

$$P=I,\ A=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+I,\ B=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+I,\ \mathscr{D}=\frac{\partial}{\partial x},\ \mathscr{D}^*=-\frac{\partial}{\partial x}.$$

对于方程

$$u_{tt} = -u_{xxxx} - u_{xx} - u + u^3, \tag{11.57}$$

定理 5 成立,其中

$$P=I, \quad A=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+I, \quad B=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \mathscr{F}(t, u)=u^3.$$

[例 3] FPU 问题

$$\ddot{\xi}_n = \xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1} + (\xi_{n+1}-\xi_n)^2 - (\xi_n - \xi_{n-1})^2 \tag{11.58}$$

可归结为如下方程:

$$u_{tt} = u_{xx} + (u_x^2)_x, \tag{11.59}$$

它具有方程(11.54)形式，其中

$$A=-\frac{\partial^2}{\partial x^2},\quad B=0,\quad \mathscr{D}=\frac{\partial}{\partial x},$$

$$\hat{\mathscr{F}}=\mathscr{D}^*\mathscr{F}(\mathscr{D}u),\quad \mathscr{F}(t,\ v)=-v^2.$$

对方程(11.59)，由等式

$$\int[u_{tt}-u_{xx}-(u_x^2)_x]u_t^k\,dx=0,\qquad k=1,\ 2,\ \cdots$$

可获得无穷多个守恒律.

[例 4] 户田(M. Toda)晶格方程

$$\ddot{\xi}_n=e^{\xi_{n+1}-\xi_n}-e^{\xi_n-\xi_{n-1}}\tag{11.60}$$

可归结为方程

$$u_{tt}=(e^{u_x})_x,\tag{11.61}$$

它的非线性项 $\hat{\mathscr{F}}=\mathscr{D}^*\mathscr{F}(\mathscr{D}u)$，$\mathscr{D}=\frac{\partial}{\partial x}$，$\mathscr{F}(v)=-e^v$. 函数 $\mathscr{F}(v)$不满足上述定理条件，因此不能应用上述定理. 但似可以利用别的方法证明它的破裂性.

已知$I_0=\int\left(\frac{1}{2}u_t^2+e^{u_x}\right)dx$ 为守恒积分，其他的由等式

$$\int[u_{tt}-(e^{u_x})_x]e^{ku_x}\,dx=0\qquad k=1,\ 2,\ \cdots$$

可得到. 例如

$$I_1=\int\left[u_te^{u_x}+\frac{1}{6}u_t^3\right]dx,$$

$$I_2=\int\left[u_te^{2u_x}+\frac{1}{3}u_t^3e^{u_x}+\frac{1}{60}u_t^5\right]dx.$$

为了证明方程(11.61)的解的破裂性，将(11.61)写为

$$u_{tt}=\frac{1}{2}(e^{2u_x})_x=e^{2u_x}u_{xx}.\tag{11.62}$$

令 $u_x=p$, $u_t=q$，则(11.62)可以写成

$$q_t=e^{2p}\cdot p_x,\quad p_t=q_x.$$

引入新的自变量变换 $\alpha=\alpha(x,\ t)$, $\beta=\beta(x,\ t)$，使它满足

$$\alpha_t = e^p\alpha_x, \qquad \beta_t = -e^p\beta_x,$$

则(11.62)可写成如下方程组

$$e^p p_\alpha = q_\alpha, \qquad e^p p_\beta = -q_\beta.$$

于是函数 $w=e^p$ 和 q 满足线性方程组

$$w_\alpha = q_\alpha, \qquad w_\beta = -q_\beta.$$

可获得波动方程

$$w_{\alpha\beta}=0, \qquad q_{\alpha\beta}=0. \tag{11.63}$$

容易看到，对于有限的 α、β 和某些(11.62)的初值问题，$w(\alpha, \beta)$ 可能是负的，因而 $w=e^p$，在(x, t)平面上的某些点，$p\to-\infty$，即产生破裂.

§12 本杰明-小野方程某些弱解的光滑性

我们考虑在初值 $H^n(\mathbb{R})$下本杰明(T. B. Benjamin)-小野(H. Ono)方程($n=2, 3$)弱解依空间变元的部分正则性.

设有本杰明-小野方程的初值问题

$$u_t+uu_x-Hu_{xx}=0, \qquad x\in\mathbb{R},\ t>0 \tag{12.1}$$

$$u(x, 0)=u_0(x), \qquad x\in\mathbb{R} \tag{12.2}$$

其中H表示希尔伯特算子

$$(Hf)(x)=p\cdot V\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(y)}{x-y}\,dy=F^{-1}(-i\,\mathrm{sgn}(\xi)\hat{f}(\xi)),$$

这里 $\hat{f}$ 表示 f 的傅里叶变换，F^{-1} 表示逆傅里叶变换.

对于希尔伯特算子，有如下易直接验证的经典的性质：($\forall u$、$v\in L_2(\mathbb{R})$)

$$H^2u=u, \tag{12.3}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}u\,Hv\,dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}vHu\,dx, \tag{12.4}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H(u)H(v)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}uv\,dx, \tag{12.5}$$

$$H(u, v)=uHv+vHu+H(Hu\cdot Hv). \tag{12.6}$$

另外，我们也知道H算子是从$L^p(\mathbb{R})$到$L^p(\mathbb{R})(p>1)$和$H^s(\mathbb{R})$到$H^s(\mathbb{R})$（任意s）的有界算子．令

$$J^s=(I-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}},\quad I^s=(-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}},\quad I=I'=H\partial_x.$$

设A和B为算子，交换子$[A, B]=AB-BA$，特别，

$$[J^s, f]g=J^s(fg)-fJ^sg.$$

如下的引理可在[134]中找到．

引理 1 设$A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$为$C^\infty$函数，且$A'\in C_0^\infty$，则交换子$[H, A]\partial_x$映射$L_2(\mathbb{R})$到$L_2(\mathbb{R})$，有

$$\|[H, A]f_x\|_0\leqslant C\|f\|_0,\qquad \forall f\in L_2(\mathbb{R}) \quad (12.7)$$

其中常数C仅依赖于A'．

附注 1 由等式$[H\partial_x, A]f=[H, A]f_x+H(A'f)$，即可推出$[H\partial_x, A]$在$L_2(\mathbb{R})$上有界．

引理 2 对任何$s\in\mathbb{R}$，存在常数$C>0$，使得对一切$\phi\in S(\mathbb{R}^n)$（施瓦兹函数类）和$f\in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$，有

$$\|[J^s, \phi]f\|_0\leqslant C\|\phi\|_{|s|+n+2}\|f\|_{s-1}. \quad (12.8)$$

引理 3 设$a, b, c\in\mathbb{R}$使得$a\geqslant c$，$b\geqslant c$，$a+b\geqslant 0$，且$a+b-c>\frac{n}{2}$，则对应关系$(f, g)\to fg$为从$H^a(\mathbb{R}^n)\times H^b(\mathbb{R}^n)$到$H^c(\mathbb{R}^n)$的连续双线性形式．

引理 4 设$s\geqslant 1$，则存在仅依赖于s的常数C，使

$$\|[J^s, \phi]u\|_0\leqslant C\|\phi'\|_s\|u\|_{s-1}.\qquad \forall\phi\in S(\mathbb{R}) \quad (12.9)$$

证明 令$v=[J^s, \phi]u$，则$\hat{v}$可表为

$$\hat{v}(x)=C\int_{-\infty}^{+\infty}((1+x^2)^{\frac{s}{2}}-(1+y^2)^{\frac{s}{2}})\hat{\phi}(y)dy.$$

存在常数C，使

$$|\hat{v}(x)|\leqslant C\int_{-\infty}^{+\infty}(1+x^2)^{\frac{s-1}{2}}|x-y||\hat{\phi}(x-y)||\hat{u}(y)|dy$$
$$+C\int_{-\infty}^{+\infty}(1+y^2)^{\frac{s-1}{2}}|x-y||\hat{\phi}(x-y)||\hat{u}(y)|dy.$$

令$h(x)=|x||\hat{\phi}(x)|$，$\hat{w}=|\hat{u}(x)|$，则有

$$\|hw\|_{s-1}\leqslant\|h\|_s\|w\|_{s-1}.$$

注意到 $\|h\|_s=\|\phi'\|_s$, $\|w\|_{s-1}=\|u\|_{s-1}$, 因此

$$\begin{aligned}\|hJ^{s-1}w\|_0&\leqslant|h|_\infty\|J^{s-1}w\|_0\\&\leqslant\|h\|_s\|w\|_{s-1}=\|\phi'\|_s\|u\|_{s-1}.\end{aligned}$$

如果 $s>1$, 可得

$$\|v\|_0\leqslant c\|\phi'\|_s\|u\|_{s-1}.$$

定理 1 对于任何 $u_0\in H^{\frac{n}{2}}$ (其中 $n=2, 3$), 存在初值问题 (12.1)、(12.2)的解 u, 使得对任何 $T>0$, 有

$$u\in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}))\cap L_2(0, T; H_{\text{loc}}^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R})).\qquad(12.10)$$

证明 设 ϕ: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为严格增加的有界光滑函数, 且 $\phi'(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R})$. 以 $\{u_{0j}\}$ 表示 $H^\infty(\mathbb{R})$函数序列, 使得依 $H^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R})$ 模 $u_{0j}\to u_0$. 令 u_j 表示方程 (12.1) 具初值 u_{0j} 的光滑解. 从 [15] 中可知 $\|u_j(\cdot,t)\|_{\frac{n}{2}}$ 是关于 t 一致有界的, 其界仅依赖于 $\|u_{0j}\|_{\frac{n}{2}}$. 因此 $\|u_j(\cdot, t)\|_{\frac{s}{2}}$ 是关于 j 和 t 是一致有界的. u_j 在空间 $L_2(0, T; H_{\text{loc}}^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}))$对 j 的一致有界性将被得到. 以下证明中我们省略了下标 j.

首先考虑 $n=2$. (12.1)对 x 微分, 乘以 ϕu_x, 再在 $\mathbb{R}$ 上积分, 经过分部积分, 可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi u_x^2dx+\int_{-\infty}^{+\infty}\phi'u_x\,Hu_{xx}dx+\int_{-\infty}^{+\infty}\phi u_{xx}H\phi_{xx}dx\\=-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi u_x(uu_x)_xdx.\qquad(12.11)\end{aligned}$$

以 $H\partial_x$ 作用于(12.1), 再乘以 ϕHu_x, 在 $\mathbb{R}$ 上积分, 经分部积分, 可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(Hu_{xx})^2dx-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi'Hu_xu_{xx}dx-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi u_{xx}\,Hu_{xx}dx\\=-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi Hu_xH(uu_x)_x.\qquad(12.12)\end{aligned}$$

(12.11)和(12.12)相加, 得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi[u_x^2+(Hu_x)^2]dx+\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' u_x Hu_{xx}dx \\
&\quad-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' Hu_x u_{xx}dx \\
&=-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi u_x(uu_x)_x dx-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi Hu_x H(uu_0)_x dx \\
&=-2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi u_x(uu_x)_x dx+\int_{-\infty}^{+\infty}Hu_x[H,\ \phi](uu_x)_x dx \\
&=4\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' uu_x^2dx-\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi''' u^3dx+\int_{-\infty}^{+\infty}Hu_x[H,\ \phi](uu_x)_x dx \\
&\quad-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi u^2u_{xxx}dx. \qquad (12.13)
\end{aligned}
$$

对于等式(12.13)右端最后积分项，经过几次积分，可得

$$
-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi u^2u_{xxx}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi''' u^3dx-3\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' uu_x^2dx-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi u_x^3dx. \qquad (12.14)
$$

另一方面，

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\phi u^2u_{xxx}dx=&-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' u^2H(uu_x)dx-2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi uu_xH(uu_x)dx \\
&+\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi u^2Hu_xdx-\frac{2}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' u^3Hu_xdx \\
&-\frac{1}{6}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi u^4dx \\
&+\frac{2}{15}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' u^5dx+\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' u(Hu_x)^2dx \\
&+\int_{-\infty}^{+\infty}\phi u_x(Hu_x)dx^2, \qquad (12.15)
\end{aligned}
$$

利用希尔伯特变换的性质(12.3)～(12.6)，可得

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\phi u_x(Hu_x)^2dx=&\int_{-\infty}^{+\infty}u_x^3dx+2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi u_xH(u_xHu_x)dx \\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi u_x^3dx-2\int_{-\infty}^{+\infty}H(\phi u_x)u_xHu_xdx
\end{aligned}
$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi u_x^3dx-2\int_{-\infty}^{+\infty}[H;\phi]u_xu_xHu_xdx-2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi u_x(Hu_x)^2dx, \tag{12.16}$$

因此，(12.15)变为

$$\begin{aligned}-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi u^2u_{xxx}dx=&-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' u^2H(uu_x)dx-2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi uu_xH(uu_x)dx\\&+\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi u^2Hu_xdx-\frac{2}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' u^3Hu_xdx\\&-\frac{1}{6}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi u^4dx+\frac{2}{15}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' u^5dx\\&+\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' u(Hu_x)^2xd+\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi u_x^3dx\\&-\frac{2}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}[H,\phi]u_x\cdot u_xHu_xdx.\end{aligned} \tag{12.17}$$

由(12.14)和(12.17)可消去$\int_{-\infty}^{+\infty}\phi u_x^3dx$，得到$-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi u^2u_{xxx}dx$的表达式．由(12.13)可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi\left[u_x^2+(Hu_x)^2-\frac{3}{2}u^2Hu_x+\frac{1}{4}u^4\right]dx\\&\quad+\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' u_xHu_{xx}dx-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' Hu_xu_{xx}dx\\&=-\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi''' u^3dx+\frac{1}{10}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' u^5dx-\frac{3}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' u^2H(uu_x)dx\\&\quad-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' u^3Hu_xdx+\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' uu_x^3dx\\&\quad+\frac{3}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' u(Hu_x)^2dx\\&\quad-\frac{3}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi uu_xH(uu_x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}Hu_x[H,\phi](uu_x)_xdx\\&\quad-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[H,\phi]u_x\cdot u_xHu_xdx.\end{aligned} \tag{12.18}$$

由引理1，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}Hu_x[H,\phi](uu_x)_xdx\leqslant C\|u_x\|_0\|uu_x\|_0\leqslant C(\|u_0\|_1).$$

利用索伯列夫不等式

$$\|g\|_\infty \leqslant \|g\|_0^{\frac{1}{2}}\|g_x\|_0^{\frac{1}{2}}, \tag{12.19}$$

再利用引理 1，有

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[H,\ \phi]u_x\cdot u_x H u_x dx \\
&\leqslant \frac{1}{2}|[H,\ \phi]u_x|_\infty \|u_x\|_0^2 \\
&\leqslant \frac{1}{2}\|[H,\phi]u_x\|_0^{\frac{1}{2}}\|\partial_x[H,\ \phi]u_x\|_0^{\frac{1}{2}}\|u_x\|_0^2 \\
&\leqslant \frac{C}{2}\|u_0\|^{\frac{1}{2}}\|u_x\|_0^{\frac{5}{2}} \leqslant C(\|u_0\|_1).
\end{aligned}
$$

因此，(12.18)右端囿于界 $C(\|u_0\|_1)$.

(12.18)左端最后二项积分可写成

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' u_x I u_{xx} dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\phi' H u_x I H u_x dx, \tag{12.20}$$

其中 $I=I'=H\partial_x$. 对于(12.20)，我们只需估计其中的一项，另一项可类似处理. (12.20)的第一项能写成

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' u_x I u_x &= \int_{-\infty}^{+\infty}\phi' u_x J u_x dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\phi' u_x (I-J) u_x dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\phi' (J^{\frac{1}{2}}u_x)^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\phi' u_x (I-J) u_x dx \\
&\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} u_x [J,\ \phi'] u_x dx \\
&\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} u_x [J^{\frac{1}{2}},\ \phi'] J^{\frac{1}{2}} u_x dx.
\end{aligned} \tag{12.21}
$$

因为 $f(x)=|x|-(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\in L^\infty(\mathbb{R})$，所以(12.21)右端第二项囿于界 $C\|u_x\|_0^2 \leqslant C(\|u_0\|_1)$. 由引理 2，(12.21)右端最后二项积分也是有界的. 因此，从(12.18)可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi\left[u_x^2+(Hu_x)^2-\frac{3}{2}u^2Hu_x+\frac{1}{4}u^4\right]dx \\
&\quad + \int_{-\infty}^{+\infty}\phi'[(J^{\frac{1}{2}}u_x)^2+(J^{\frac{1}{2}}Hu_x)^2]dx \leqslant C(\|u_0\|_1).
\end{aligned} \tag{12.22}
$$

(12.22)对 t 积分，$t\in[0,t]$，$0<t\leqslant T$，有

$$\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\phi'[(J^{\frac{1}{2}}u_x)^2+(J^{\frac{1}{2}}Hu_x)^2]dx\,dt$$

$$\leqslant CT-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi\left[u_x^2+(Hu_x)^2-\frac{3}{2}u^2Hu_x+\frac{1}{4}u^4\right]dx\Big|_0^t.$$

因为 ϕ 和 $\|u\|_1$ 对 t 和 j 一致有界，由此推出：(j 充分大)

$$\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\phi'[(J^{\frac{1}{2}}u_x)^2+(J^{\frac{1}{2}}Hu_x)^2]dx\,dt\leqslant C,$$

其中常数 C 仅依赖于 T、ϕ 和 $\|u_0\|_1$. 适当选取 ϕ，可得

$$\int_0^T\int_{-R}^{R}(J^{\frac{1}{2}}u_x)^2dx\,dt\leqslant C,$$

其中 C 仅依赖于 T、R 和 $\|u_0\|_1$. 因此 $n=2$ 时定理成立.

现考虑 $n=3$ 的情况. 以 $J^{\frac{3}{2}}$ 作用(12.1)，再乘以 $\phi J^{\frac{3}{2}}u$，并在 $\mathbb{R}$ 上积分、分部积分后，得

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(J^{\frac{3}{2}}u)^2dx+\int_{-\infty}^{+\infty}\phi'J^{\frac{3}{2}}uJ^{\frac{3}{2}}Hu_xdx$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\phi J^{\frac{3}{2}}u_xJ^{\frac{3}{2}}Hu_xdx$$

$$=-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi J^3uJ^{\frac{3}{2}}(uu_x)dx. \tag{12.23}$$

以 $J^{\frac{3}{2}}H$ 作用于(12.1)两端，再乘以 $\phi J^{\frac{3}{2}}Hu$，在 $\mathbb{R}$ 上积分.分部积分后，得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(J^{\frac{3}{2}}Hu)^2dx-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi'J^{\frac{3}{2}}HuJ^{\frac{3}{2}}u_xdx$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi J^{\frac{3}{2}}Hu_xJ^{\frac{3}{2}}u_xdx$$

$$=-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi J^{\frac{3}{2}}HuJ^{\frac{3}{2}}H(uu_x)dx. \tag{12.24}$$

(12.23)、(12.24)相加，得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi[(J^{\frac{3}{2}}u)^2+(J^{\frac{3}{2}}Hu)^2]dx+\int_{-\infty}^{+\infty}\phi'J^{\frac{3}{2}}uJ^{\frac{3}{2}}Hu_xdx$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' J^{\frac{3}{2}}\ HuJ^{\frac{3}{2}}u_x dx$$

$$=-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi J^{\frac{3}{2}}\ uJ^{\frac{3}{2}}(uu_x)dx-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi J^{\frac{3}{2}}\ HuJ^{\frac{3}{2}}H(uu_x)dx$$

$$=-2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi J^{\frac{3}{2}}\ uJ^{\frac{3}{2}}(uu_x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}J^{\frac{3}{2}}\ Hu[H,\ \phi]J^{\frac{3}{2}}(uu_x)dx$$

$$-2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi uu_x\ Jud x-2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi u_x(I-J)uu_x dx$$

$$+2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi uu_x Hu_{xx}dx. \tag{12.25}$$

等式(12.25)右端最后一项可写成

$$2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi uu_x Hu_{xxx}dx$$

$$=-2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' u^2u_x^2dx+2\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi uu_x^2dx+2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' uu_x\ Hu_{xx}dx$$

$$+2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi uu_x^3dx+2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi uu_{xx}Hu_{xx}dx, \tag{12.26}$$

等式(12.26)右端最后一项为

$$2\int\phi uu_{xx}Hu_{xx}dx=-2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' uHu_xu_{xx}dx-2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' uHu_{xx}H(uu_x)dx$$

$$+\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi'(Hu_x)^3dx-2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi u_xHu_xH(uu_x)dx$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\phi uu_x(Hu_x)^2dx+\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi u(Hu_x)^2dx$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\phi u_x^2Hu_xdx+\int_{-\infty}^{+\infty}\phi u_x^2Hu_{xx}dx$$

$$-2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi uHu_{xx}H(uu_x),dx \tag{12.27}$$

其中

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\phi u_x^2Hu_{xx}dx=-2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' uu_x\ Hu_{xx}dx+\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' u^2u_x^2dx$$

$$-\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi uu_x^2dx$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi uu_x^3dx-2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi uu_{xx}\ Hu_{xx}dx.$$

上式代入(12.27)，可得 $2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi uu_{xx}Hu_{xx}dx$ 的表达式，因而可得 $2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi uu_x dx\, Hu_{xxx}$ 的表达式，于是(12.25)变为

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi[(J^{\frac{3}{2}}u)^2+(J^{\frac{3}{2}}Hu)^2-3uu_x^2-u(Hu_x)^2]dx\\
&\quad+\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' J^{\frac{3}{2}}uJ^{\frac{3}{2}}Hu_x dx-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' J^{\frac{3}{2}}HuJ^{\frac{3}{2}}u_x dx\\
&=-\frac{3}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' u^2u_x^2dx-2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi uu_x Ju dx-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' uHu_xH(uu_x)dx\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi uu_x(Hu_x)^2dx+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' u_x^2Hu_xdx+\frac{3}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi uu_x^3dx\\
&\quad+\frac{1}{6}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi'(Hu_x)^3dx-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi u_xHu_xH(uu_x)dx\\
&\quad+\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' uu_xHu_{xx}dx-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' uHu_xu_{xx}dx\\
&\quad-2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi uu_x(I-J)u_{xx}dx-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi uHu_{xx}H(uu_x)dx\\
&\quad+\int_{-\infty}^{+\infty}J^{\frac{3}{2}}Hu[H,\phi]J^{\frac{3}{2}}(uu_x)dx+2\int_{-\infty}^{+\infty}J^{\frac{3}{2}}u[J^{\frac{3}{2}},\phi]uu_xdx.
\end{aligned}
\tag{12.28}
$$

(12.28)右端第一项至第三项显然囿于界 $C\|u_x\|_0^2\leqslant C(\|u_0\|_{\frac{3}{2}})$.
(12.28)右端第五项有界，

$$
C|u_x|_{L^3}^3\leqslant C\|u_x\|_{\frac{1}{6}}^3\leqslant C\|u\|_{\frac{1}{6}}^3\leqslant C(\|u_0\|_{\frac{3}{2}}).
$$

其中我们用到了 $H^{n/2(n+2)}(\mathbb{R})\to L^{n+2}(\mathbb{R})$. 另外，我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' uu_xHu_{xx}dx-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' uHu_xu_{xx}dx\\
&\quad\leqslant C\|u\|_{\frac{3}{2}}(\|\phi' uu_x\|_{\frac{1}{2}}+\|\phi' uHu_x\|_{\frac{1}{2}}).
\end{aligned}
$$

由引理3，这两项可估计为

$$
\begin{aligned}
&C\|u\|_{\frac{3}{2}}(\|\phi' u\|_1\|u_x\|_{\frac{1}{2}}+\|\phi' u\|_1\|Hu_x\|_{\frac{1}{2}})\\
&\quad\leqslant C\|u\|_{\frac{3}{2}}^2\leqslant C(\|u_0\|_{\frac{3}{2}}),
\end{aligned}
$$

再由引理3，有

$$-2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi uu_x(I-J)u_{xx}dx-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi uH(uu_x)Hu_{xx}dx$$

$$\leqslant C\|u\|_{\frac{3}{2}}[\|\phi uu_x\|_{\frac{1}{2}}+\|\phi uH(uu_x)\|_{\frac{1}{2}}]$$

$$\leqslant C\|u\|_{\frac{3}{2}}[\|\phi u\|_1\|u_x\|_{\frac{1}{2}}+\|\phi u\|_1\|H(uu_x)\|_{\frac{1}{2}}],$$

因此 $\|\phi u\|_1^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^2u^2dx+\int_{-\infty}^{+\infty}(\phi'u+\phi u_x)^2dx\leqslant C\|u\|_1^2.$

于是,

$$-2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi uu_x(I-J)u_{xx}dx-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi uH(uu_x)Hu_{xx}dx$$

$$\leqslant C\|u\|_{\frac{3}{2}}^2\leqslant C(\|u_0\|_{\frac{3}{2}}).$$

由引理 1, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}J^{\frac{3}{2}}Hu[H,\phi]J^{\frac{3}{2}}(uu_x)dx$$

$$\leqslant C\|u\|_{\frac{3}{2}}\|[H,\ \phi]J^{\frac{3}{2}}(uu_x)\|_0$$

$$\leqslant C\|u\|_{\frac{3}{2}}\|u^2\|_{\frac{3}{2}}\leqslant C\|u\|_{\frac{3}{2}}^2\leqslant C(\|u_0\|_{\frac{3}{2}}).$$

由引理 4, 有

$$2\int_{-\infty}^{+\infty}J^{\frac{3}{2}}u[J^{\frac{3}{2}},\ \phi]uu_xdx\leqslant C\|J^{\frac{3}{2}}u\|_0\|[J^{\frac{3}{2}},\ \phi]uu_x\|_0$$

$$\leqslant C\|u\|_{\frac{3}{2}}\|\phi'\|_{\frac{3}{2}}\|J^{\frac{1}{2}}(uu_x)\|_0$$

$$\leqslant C\|u\|_{\frac{3}{2}}^2\leqslant C(\|u_0\|_{\frac{3}{2}}).$$

因此, 从(12.28)可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi[(J^{\frac{3}{2}}u)^2+(J^{\frac{3}{2}}Hu)^2-3uu_x^2-u(Hu_x)^2]dx$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\phi'J^{\frac{3}{2}}uJ^{\frac{3}{2}}Hu_xdx-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi'J^{\frac{3}{2}}HuJ^{\frac{3}{2}}u_xdx\leqslant C(\|u_0\|_{\frac{3}{2}}).\tag{12.29}$$

(12.29)左端最后二项可类似于 $n=2$ 的情况作如下估计:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi[(J^{\frac{3}{2}}u)^2+(J^{\frac{3}{2}}Hu)^2-3uu_x^2-u(Hu_x)^2]dx$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\phi'[(J^2u)^2+(J^2Hu)^2]dx\leqslant C(\|u_0\|_{\frac{3}{2}}),$$

因 ϕ 和 $\|u\|_{\frac{3}{2}}$ 对 t 一致有界，上式对 t 积分，可得：$(t\in[0,t],0<t\leqslant T)$

$$\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}\phi'[(J^2u)^2+(J^2Hu)^2]dx\,dt\leqslant C,$$

其中 C 仅依赖于 T、ϕ 和 $\|u_0\|_{\frac{3}{2}}$(j 充分大)．那么，选取适当的 ϕ，有

$$\int_0^T\int_{-R}^{R}(J^2u)^2dx\,dt\leqslant C,$$

定理证毕．

现考虑中等深度长波方程的初值问题：

$$u_t+uu_x+\frac{1}{\delta}u_x-Tu_{xx}=0,\qquad u(x,\ 0)=u_0(x),\qquad (12.30)$$

其中

$$Tf(x)=-\frac{1}{2\delta}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{cth}\left[\frac{\pi(x-y)}{2s}\right]u(y)dy.\qquad (12.31)$$

方程 (12.30) 在描述浅水波运动时 ($\delta\to0$) 将归纳为 KdV 方程，当在深水运动时($\delta\to\infty$)归纳为本杰明-小野方程．显然，有如下引理：

引理 5 对任何 $\delta>0$，$\forall\xi\in\mathbb{R}$，有

$$-\frac{1}{\delta}+2\pi|\xi|\leqslant2\pi\xi\coth(2\pi\delta\xi)\leqslant\frac{1}{\delta}+2\pi|\xi|.$$

附注 2 从引理 5 可知，算子 $H\partial_x^2$ 与算子 $T\partial_x^2+\frac{1}{\delta}\partial_x$ 之差为一个零阶拟微分算子，它在 $H^s(\mathbb{R})$ 有界．

定理 2 (i) 设 $s>\frac{3}{2}$ 和 $0<T<\infty$．如 $u\in C(0,\ T;\ H^s(\mathbb{R}))$ 是问题(12.30)具初值 $u_0(x)\in H^s(\mathbb{R})$ 的解，则有

$$u\in L^2(0,\ T;\ H_{loc}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R})).\qquad (12.32)$$

(ii) 设 $u_0\in H^{\frac{n}{2}}$，$n=2$ 或 3，则存在问题(12.30)的解

$$u\in L^\infty(0,\ T;\ H^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}))\cap L^2(0,\ T;\ H_{loc}^{(n+1)/2}(\mathbb{R})).\quad (12.33)$$

证明 方程(12.30)可写成

$$u_t+uu_x-Hu_{xx}=Lu, \tag{12.34}$$

其中

$$L=T\partial_x^2+\frac{1}{\delta}\partial_x-H\partial_x^2. \tag{12.35}$$

由附注3, 可知 L 为在 $H^s(\mathbb{R})$ 中的有界算子.

(i) 取 ϕ 如同定理1, 有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi[(J^su)^2+(J^sHu)^2]dx+\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' J^suJ^sHu_xdx\\
&\quad-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' J^sHuJ^su_xdx\\
&=-2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi J^suJ^s(uu_x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}J^sHu[H,\ \phi]J^s(uu_x)dx\\
&\quad+\int_{-\infty}^{+\infty}\phi J^suJ^sLudx+\int_{-\infty}^{+\infty}\phi J^sHuJ^sHLudx\\
&=-2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi J^su[J^s,\ u]u_xdx+\int_{-\infty}^{+\infty}\phi' u(J^su)^2dx\\
&\quad+\int_{-\infty}^{+\infty}\phi u_x(J^su)^2dx+\int_{-\infty}^{+\infty}J^sHu[H,\ \phi]J^s(uu_x)dx\\
&\quad+\int_{-\infty}^{+\infty}\phi J^su\cdot J^sLudx+\int_{-\infty}^{+\infty}\phi J^sHuJ^sHLudx,
\end{aligned} \tag{12.36}$$

由引理1、引理2和 L 的有界性, 可知(12.36)右端的一切项都囿于界 $C\|u_0\|_s^2$.

(ii) 类似定理1的证明, 相应的(12.18)式和(12.28)增加了含有算子 L 的项, 但这些项均囿于界 $\|u_0\|_{\frac{n}{2}}$($n=2$ 或 3), 因此定理成立.

史密斯(D. R. Smith)方程可写成

$$u_t+uu_x+L_su_x=0, \tag{12.37}$$

其中

$$L_s\hat{u}(\xi)=P_s(\xi)\hat{u}(\xi), \qquad P_s(\xi)=2\pi(\sqrt{1+\xi^2}-1).$$

类似于(12.34), 可把方程(12.37)改写为

$$u_t + uu_x - Hu_{xx} = K_s u. \tag{12.38}$$

注意到 $2\pi + \frac{\pi}{|\xi|}$ 当 $|\xi| \to \infty$ 时有界，因此 $2\pi|\xi| - P_s(\xi)$ 是有界的. K_s 为零阶拟微分算子，它在 $H^s(\mathbb{R})$ 中为有界算子. 因此，我们可用如同中等深度长波方程的方法来讨论史密斯方程初值问题弱解的局部光滑性.

第3章

某些非线性演化方程研究的新结果

近年来，对非线性波动方程、非线性薛定谔方程、KdV 方程等非线性演化方程进行了系统的、深入的研究，其中包括整体解的存在性、唯一性、正则性、散射性以及解的破裂问题，取得了一系列很好的结果．限于篇幅，本章着重介绍一些令人关心而重要的结果．本章内容可参见[18]、[129]及其参考文献．

§13 非线性波动方程和非线性薛定谔方程

考虑如下的非线性波动方程

$$u_{tt}-\Delta u+f(u)=0 \tag{13.1}$$

和非线性薛定谔方程

$$iu_t-\Delta u+f(u)=0. \tag{13.2}$$

这里，对于 NLW 方程(13.1)，设 $f(s):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$为实函数，$f(0)=0$，$F'(s)=f(s)$，$F(0)=0$．对于 NLS 方程(13.2)，设 $f(s):\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 为复值函数，$f(0)=0$，$f(u)$ 具有形式 $f(u)=g(|u|^2)u$，其中 $g(s)$ 为实函数 $F(u)=G(|u|^2)/2$, $G'(s)=g(s)$，$s\in\mathbb{R}$，$G(0)=0$．

易知 NLW 方程(13.1)的能量 $E(u(t))$为

$$E(u(t))=\int\left[\frac{1}{2}u_t^2+\frac{1}{2}|\nabla u|^2+F(u)\right]dx, \tag{13.3}$$

NLS 方程(13.2)的能量 $E(u(t))$为

$$E(u(t))=\int\left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2+F(u)\right]dx. \tag{13.4}$$

我们定义两个希尔伯特空间．首先，能量空间为：

$$X = H^1 \times L_2, \qquad \text{对于 NLW(13.1)},$$
$$X = H^1, \qquad \text{对于 NLS(13.2)}.$$

其次，我们定义

$$X_2 = H^2 \times H^1, \qquad \text{对于 NLW(13.1)},$$
$$X_2 = H^2, \qquad \text{对于 NLS(13.2)}.$$

我们用以下符号表示：$L_p(\mathbb{R}^n)$的模表示$|u|_p(1\leqslant p\leqslant\infty)$，索伯列夫空间$W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$具有模

$$|u|_{k,p}^p = \sum_{|\alpha|\leqslant k}\int|\partial^\alpha u(x)|^p dx,$$

$H^k(\mathbb{R}^n) = W^{k,2}(\mathbb{R}^n)$. 模

$$\|v\|_{r,p}^r = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int|u(x,\ t)|^p dx\right)^{r/p} dt$$

表示空间$L_r(L_p) = L_r(\mathbb{R};\ L_p(\mathbb{R}^n))$的模.如果$X$是巴拿赫空间，则$C(X)$表示取值$X$上对$t$为强连续函数的集合．我们有

定理 1（弱解） 考虑 NLW 方程(13.1)和 NLS 方程(13.2)，设

$$F(u) \geqslant -C|u|^2 \tag{13.5}$$

对某个常数C成立，且

$$|F(u)/f(u)| \to \infty, \qquad |u| \to \infty \tag{13.6}$$

则对任何初值$E(u(0))<\infty$，$u(0)\in L_2$，存在一个弱连续解u: $\mathbb{R} \to X$(NLW 或 NLS)，使得

$$E(u(t)) \leqslant E(u(0)). \qquad \forall t\in\mathbb{R} \tag{13.7}$$

弱解的唯一性仍待解决．条件(13.5)是一个不太好的条件，条件(13.6)要求$F(u)$关于u的增长慢于指数，$|u|\to\infty$．对于 NLS 方程，我们有$|u(t)|_2\leqslant|u(0)|_2$．当条件(13.6)稍为加强时，可得到等号．

定理 1 还可作其他假设．例如，对于 NLS 方程，我们将条件(13.5)置换为更弱的条件

$$F(u) \geqslant -C|u|^2 - C|u|^{q+1}, \quad q<1+\frac{4}{n}. \tag{13.8}$$

对于 NLW 方程，能将条件(13.5)、(13.6)置换为单个条件

$$uf(u)\geqslant 0. \tag{13.9}$$

由(13.9)可推出 $F(u)\geqslant 0$，且在无穷远处可急剧增长，例如 $f(u)=ue^{u^2}$.

定理 2 (有限能量解)　对于 NLW 方程，设满足条件(13.5)；对于 NLS 方程，设满足条件(13.8)．设 $f(u)\in\mathbb{C}^1$，且

$$|f'(u)|\leqslant C(1+|u|^{p-1}),\qquad C>0 \tag{13.10}$$

其中

$$1<p<1+\frac{4}{n-2},\qquad (1<p<\infty,\ n=1,\ 2) \tag{13.11}$$

则定理 1 的解是唯一的，是一个强连续函数 $u:\mathbb{R}\to X$，且满足 $E(u(t))=E(u(0))$，$t\in\mathbb{R}$.

对于 NLS 方程，$\|u(t)\|=\|u(0)\|$，增长条件是否为必要条件目前尚不清楚．对于解的正则性，有

定理 3 (H^2 解)　设 $f(u)$满足如同定理 2 的条件．如果初值 $u(0)\in X_2$，则存在唯一的取值在 X_2 上的弱连续解

$$u:\ \mathbb{R}\to X_2.$$

现在简要叙述定理 1～定理 3 的证明．首先考虑 NLS 方程．由(13.4)，有

$$\frac{1}{2}\int|\nabla u|^2\,dx=E(u(0))-\int F(u)dx$$

$$\leqslant E(u(0))+C\int|u|^2\,dx+C\int|u|^{q+1}\,dx.$$

上式右端的第一、第二项为常数，最后一项用索伯列夫插值不等式，有

$$\int|u|^{q+1}dx\leqslant C\left(\int|u|^2\,dx\right)^{[2(q+1)-n(q-1)]/4}\left(\int|\nabla u|^2\,dx\right)^{n(q-1)/4}.$$

对于极限情况 $q=1+\frac{4}{n}$，有

$$\int|u|^{2+\frac{4}{n}}dx\leqslant\left(\int|u|^2 dx\right)^{\frac{2}{n}}\left(\int|\nabla u|^2\,dx\right).$$

由假设 $q<1+\frac{4}{n}$ 可知，最后指数 $\frac{n(q-1)}{4}<1$，因而$\int|\nabla u|^2dx$ 和 $\int F(u)dx$ 有界，由此可得定理 1 的结论．至于定理 2，关于唯一性的证明，为简单计，将条件(13.10)换成

$$|f'(u)|\leqslant C|u|^{p-1}. \tag{13.10'}$$

设 $u(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 为 NLS 方程具相同初值的两个解，则它们的差满足积分方程

$$u(t)-v(t)=i\int_0^t U_0(t-\tau)(f(u(\tau))-f(v(\tau)))d\tau,$$

其中 $U_0(t)=\exp(-i\Delta)$表示自由薛定谔方程的生成子．上式两端取 $L_{p+1}(\mathbb{R}^n)$模，得

$$\begin{aligned}&|u(t)-v(t)|_{p+1}\\&\leqslant C\int_0^t|U_0(t-\tau)|_{(p+1)/p\to p+1}|f(u(\tau))-f(v(\tau))|_{(p+1)/p}d\tau,\end{aligned}$$

其中$|A|_{p\to q}$表示算子 A 从 L_p 到 L_q 的模．利用 $L^{p+1}-L^{1+\frac{1}{p}}$ 估计

$$|u(t)|_{1+\frac{1}{p}}\leqslant Ct^{\frac{n}{2}-\frac{n}{p+1}}|u_0|_{p+1},$$

可得

$$\begin{aligned}|u(t)-v(t)|_{p+1}\leqslant C\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{2}{r}}(|u(t)|_{p+1}^{p-1}\\+|v(\tau)|_{p+1}^{p-1})|u(\tau)-v(\tau)|_{p+1}d\tau,\end{aligned} \tag{13.12}$$

其中

$$r=\frac{4}{n}\frac{p+1}{p-1}. \tag{13.13}$$

由假设(13.11)，$r>2$，因此(13.12)中积分核对时间 t 局部可积，另一方面，从能量估计和(13.11)可知 $u、v\in L^\infty(H^1)\subset L^\infty(L_{p+1})$．因此有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|u(t)-v(t)|_{p+1}\leqslant CT^{1-\frac{2}{r}}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|u(t)-v(t)|_{p+1},$$

因此，当 $CT^{1-\frac{2}{r}}<1$ 时，$u(t)\equiv v(t)$，$t\in[0, T]$. 重复上述证明过程，即有 $u\equiv v$，$t\in[T, 2T]$. 因此，$u(t)\equiv v(t)$，$\forall t\geqslant 0$.

定理 3 的证明 函数 $v=u_t=\dfrac{\partial u}{\partial t}$ 满足方程

$$iv_t-\Delta v+f(u)_t=0,$$

其中

$$v(t)=v_0(t)+i\int_0^t U_0(t-\tau)[f(u(\tau))]_\tau d\tau. \tag{13.14}$$

这里 $v_0(t)=U_0(t)v(0)$，由(13.10)′，

$$|f(u)_t|\leqslant C|u|^{p-1}|v|.$$

因此，由(13.14)作 L_{p+1} 估计，有

$$|v(t)-v_0(t)|_{p+1}\leqslant C\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{2}{r}}|u(\tau)|_{p+1}^{p-1}|v(\tau)|_{p+1}d\tau.$$

因为 v_0、$u\in L^\infty(L_{p+1})$，我们有

$$|v(t)|_{p+1}\leqslant C+C\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{2}{r}}|v(\tau)|_{p+1}d\tau,$$

这个沃尔泰拉(V. Volterra)积分推出至少在 t 的有限区间，$v\in L^\infty(L_{p+1})$.

现考虑线性方程初值问题

$$iv_t-\Delta v=h(x, t),\quad v(x, 0)=0 \tag{13.15}$$

的解. 如果 p 满足(13.11)，r 由(13.13)给定，下面我们要证明如果 $h(x, t)\in L^{r'}(L_{(p+1)'})$，则

$$v\in C(L_2). \tag{13.16}$$

为此，记(13.15)的解为

$$v(t)=i\int_0^t U_0(t-\tau)h(\tau)d\tau.$$

对 U_0 作 $L_{p+1}-L_{1+\frac{1}{p}}$ 估计：

$$\begin{aligned}|v(t)|_2^2&=(v(t), v(t))\\&=\int_0^t\int_0^t(U_0(t-\tau)h(\tau), h(\sigma))d\tau\, d\sigma\\&\leqslant C\int_0^t\int_0^t|\sigma-\tau|^{-2/r}|h(\tau)|_{H^{1/p}}|h(\sigma)|_{H^{1/p}}d\tau\, d\sigma\end{aligned}$$

$$\leqslant C\|h\|_{r',H^{1,p}}.$$

因为 $\frac{2}{r}+\frac{1}{r'}=1+\frac{1}{r}$，这就证明了(13.16)．对函数 $v=u_t$ 和 $h=-f(u)_t$ 应用(13.16)，因为

$$|h|_{1+\frac{1}{p}}\leqslant C|u|_{p+1}^{p-1}|v|_{p+1}\leqslant \text{const},$$

因此 $h\in L^\infty(L_{1+\frac{1}{p}})$．由(13.16)，$v\in C(L_2)$.

其次，我们注意到

$$\begin{aligned}|u_t|_2^2&=|-\Delta u+f(u)|_2^2\\&=|\Delta u|_2^2+2\mathrm{Re}(\nabla u,\ f'(u)\nabla u)+|f(u)|_2^2,\end{aligned}$$

因此(在有限时间间隔中)，

$$\begin{aligned}|\Delta u|_2^2&\leqslant C+C\int|u|^{p-1}|\nabla u|^2dx\leqslant C+C|u|_{p+1}^{p-1}|\nabla u|_{p+1}^2\\&\leqslant C+C|\nabla u|_{p+1}^2\leqslant C+C|\Delta u|_2^{2-\frac{4}{r}}|\Delta u|_2^{4/r}.\end{aligned}$$

因为 $u\in C(H^1)$ 和 $4/r<2$，可得 $|\Delta u|_2$ 的有界性，即 $\|u\|_{H^2}$ 有界.

定理 2 的证明 (证明解的存的性) 令 $E=C(H^1)$，$F=L^r(W^{1,p+1})$，其中 r 由(13.13)所定．为了证明存在性，只要证明积分方程 $u=u_0+\mathscr{N}u$ 可解，其中 $u_0(t)=U_0(t)\varphi$，$\varphi=u(0)$，$\mathscr{N}$ 为积分算子

$$\mathscr{N}u(t)=i\int_0^t U_0(t-\tau)f(u(\tau))d\tau.$$

如同前面关于唯一性的证明，有

$$\|\mathscr{N}u\|_{r,p+1}\leqslant C_T\|u\|_{\infty,p+1}^{p-1}\|u\|_{r,p+1}.$$

类似地，取空间方向的导数

$$\begin{aligned}&|\nabla[\mathscr{N}u(t)]|_{p+1}\\&\leqslant\int_0^t|U_0(t-\tau)|_{p+1/p\to p+1}|\nabla[f(u(\tau))]|_{(p+1)/p}d\tau\\&\leqslant C\int_0^t|t-\tau|^{-2/r}|u(\tau)|_{p+1}^{p-1}|\nabla u(\tau)|_{p+1}d\tau,\end{aligned}$$

因此，当 $r>2$ 时，

$$\|\nabla\mathscr{N}u\|_{r,p+1}\leqslant C_T\|u\|_{\infty,p+1}^{p-1}\|\nabla u\|_{r,p+1}.$$

因为 $H^1\subset L_{p+1}$，有

$$\|\mathscr{N}u\|_F\leqslant C_T\|u\|_E^{p-1}\|u\|_F.$$

另一方面，从估计(13.16)有

$$\begin{aligned}\|\mathscr{N}u\|_{\infty,2}&\leqslant C_T\|f(u)\|_{r',(p+1)'}\\&\leqslant C_T\left(\int_0^T|u(t)|_{p+1}^{pr'}dt\right)^{1/r'}\\&\leqslant C_T\|u\|_{\infty,p+1}^{p-1}\|u\|_{r',p+1},\end{aligned}$$

上式能置换 r' 为更大的 r. 类似地，微分算子满足

$$\|\nabla\mathscr{N}u\|_{\infty,2}\leqslant C_T\|u\|_{\infty,p+1}^{p-1}\|\nabla u\|_{r,p+1},$$

因此，

$$\|\mathscr{N}u\|_E\leqslant C_T\|u\|_E^{p-1}\|u\|_F.$$

令 $G=C(L_2)\cap L_r(L_{p+1})$，则差 $\mathscr{N}u-\mathscr{N}v$ 满足估计

$$\|\mathscr{N}u-\mathscr{N}v\|_G\leqslant C_T(\|u\|_{E\cap F}+\|v\|_{E\cap F})^{p-1}\|u-v\|_G,\tag{13.17}$$

这里，当 $T\to0$ 时，$G\to0$. 由

$$\|u\|_{2+\frac{4}{n},2+\frac{4}{n}}\leqslant C\|\varphi\|_2\quad 及\quad \|u\|_2=\|\varphi\|_2$$

的插值，可得

$$\|u\|_{r,p+1}\leqslant C|\varphi|_2,\qquad 1<p<1+\frac{4}{n-2}\tag{13.18}$$

其中

$$\frac{2}{r}=n\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right]\quad 或\quad r=\frac{4(p+1)}{n(p-1)}.$$

由(13.18)可得 $\|u_0\|_{E\cap F}\leqslant C|\varphi|_{1,2}$. 令 $R=2C|\varphi|_{1,2}$，则对 T 充分小，映射 $u\to u_0+\mathscr{N}u$ 在完全度量空间$\{u\in G: \|u\|_{E\cap F}\leqslant R\}$上是压缩的，因此这个映射具有唯一的不动点，时间 T 依赖于 φ 的 H^1 模. 因为 $u(t)$ 的 H^1 模是有界的，我们能重复这个过程，具有初始时刻 T, $2T$, $\cdots$，一直扩展到$(0, \infty)$.

定理 1 的证明 设 NLS 方程满足条件(13.6)和(13.8). 对于充分大的 u，我们采用截断非线性项 $f(u)$ 的办法. 设对于有界的 u，$f_j(u)$一致收敛于 $f(u)$，且 $f_j(u)$满足(13.10)和(13.11)，条件(13.6)和(13.8)对 f_j 一致成立. 对于固定的 j，能应用定理 2,

存在方程

$$i\partial_t u_j - \Delta u_j + f_j(u_j) = 0 \tag{13.19}$$

的解 $u_j \in C(X)$，且

$$\int\left\{\frac{1}{2}|\nabla u_j|^2 + F_j(u_j)\right\}dx = \int\left\{\frac{1}{2}|\nabla u_0|^2 + F_j(u_0)\right\}dx$$

$$\leqslant \text{const} \tag{13.20}$$

与 t 和 j 无关.

$$\int |u_j|^2\, dx = \int |u_0|^2\, dx.$$

如前面所证，假设(13.8)推出 u_j 在 H^1 中对 t 和 j 一致有界. 因此，由弱紧致性，推出存在一个子序列(仍记为 u_j)使得

$$u_j \to u \text{ 在 } L^\infty(H^1) \text{中弱 * 收敛},$$

这就充分证明了(13.19)中线性部分的弱收敛性. 困难在于证明非线性项 $f_j(u_j)$ 在某种意义下收敛于 $f(u)$. 我们将证明它几乎处处收敛. 因为 $H^1(B)$ 在 $L_2(B)$ 中是紧的，其中 $B \subset \mathbb{R}^n$ 是每一有界集，我们需要时间方向的紧性. 由(13.6)和 $\int F_j(u_j)\,dx$ 的有界性，可知 $f_j(u_j)$ 在 $L^\infty(L_1 + L_2)$ 中是有界的. 由方程推出

$$i\partial_t u_j = \Delta u_j - f(u_j)$$

在 $L^\infty(H^{-1} + L_1)$ 中有界. 由奥宾(J. P. Aubin)紧性定理和对角线选取法，存在子序列

$$u_j \to u, \qquad \text{几乎处处},$$

因而

$$f_j(u_j) \to f(u), \qquad \text{几乎处处}.$$

为得到偏微分方程的解，我们要求这种收敛性至少在分布意义下成立. 这从几乎处处收敛，利用叶戈罗夫(I.P. Egorov)引理，$\int F_j(u_j)dx$ 的有界性和假设(13.6)得到. 因 $f_j(u_j) \to f(u)$，依 $L_1(B)$ 强收敛，其中 $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 为有界集，由此得到 $\lim\limits_{j\to\infty} u_j = u$ 满足 NLS 方程. 利用弱极限和法图(P. J. L. Fatou)引理，等式(13.20)

推出不等式 $E(u(t))\leqslant E(u_0)$，且由 u 的连续性可知它满足初始条件.

现简单地叙述对于 NLW 方程的证明. 首先考虑在假设(13.9)下定理 1 的证明. 此时 $F(u)\geqslant 0$，则由能量守恒(13.3)推出 $|\nabla u|_2$ 和 $|\partial_t u|_2$ 的有界性. 因此 $|u|_2$ 在有限时间内也是有界的，如同证明 NLS方程那样，以 f_j 近似 f，得到 $f_j(u_j)\to f(u)$ 几乎处处. 因不作假设(13.6)，就需要新的方法. 对 u_j 利用等式

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{1}{2}\int u_j^2\,dx\right]=\int[u_{jt}^2-|\nabla u|^2-u_jf(u_j)]\,dx,$$

可以得到 $\iint u_jf(u_j)\,dx\,dt$ 在有限时间内的有界性，适合叶戈罗夫引理，推出 $f_j(u)\to f(u)$ 依 L^1_{loc} 模，其他证明如前.

对于 NLW 方程，定理 2 和定理 3 的证明比对于 NLS 方程更困难. 困难来自于线性波动算子的 $L_{p+1}-L_q$ 估计，其中 $q=(1-p^{-1})^{-1}$、$p\leqslant 1+\dfrac{4}{n-1}$；而对于 NLS 方程，没有这个限制.

现应用假设(13.11)证明 NLW 方程解的唯一性. 事实上，设 u 和 v 为 NLW 方程的两个解，则有

$$|u(t)-v(t)|_q\leqslant C\int_0^t(t-\tau)^{-1+2/(n+1)}(|u(\tau)|_{\gamma,q}+|v(\tau)|_{\gamma,q})^{p-1}|u(\tau)-v(\tau)|_q\,d\tau,\quad(13.21)$$

其中 $q=2+\dfrac{4}{n-1}$，$\gamma=\dfrac{n}{2(n+1)}$. 利用赫尔德不等式，对(13.21)式右端的积分第一项取 L_α 模，第二项取 L_β 模，第三项取 L_∞ 模，其中 $\alpha^{-1}+\beta^{-1}=1$，$\beta=(n-2)[2(n+2)(p-1)]^{-1}$. 我们能证明解 u、$v\in L_{\beta(p-1)}(W^{\gamma,q})$，$\alpha\left(1-\dfrac{2}{n+1}\right)<1$，因此

$$|u(t)-v(t)|_q\leqslant C_T(\sup_\tau|u(\tau)-v(\tau)|_q).$$

当 $T\to 0$ 时，$C_T\to 0$，这就推出了解的唯一性.

唯一性对于非线性项 $f(u)$ 为任意增长的情况也可能成立. 对于 NLW 方程，设 $f(0)=0$，f 非减，$f(u)$ 对 $u<0$ 为有界，$n=3$. 例

如 $f(u)=e^u-1$. 则对于好的初值，导致唯一光滑解. 事实上 $f(u)\geqslant -A$, $\forall u\in\mathbb{R}$, 设 u_0、v 和 w 分别满足方程

$$(\partial_t^2-\Delta)u_0=0,\quad (\partial_t^2-\Delta)v=A,\quad (\partial_t^2-\Delta)w+f(v)=0,\tag{13.22}$$

设 u_0、v、w 具有相同的初值，则 u、v、w 满足积分方程

$$u(t)=u_0(t)-\int_0^t R(t-\tau)*f(u(\tau))d\tau,\tag{13.23}$$

$$v(t)=u_0(t)+\int_0^t R(t-\tau)*A\,d\tau,\tag{13.24}$$

$$w(t)=u_0(t)-\int_0^t R(t-\tau)*f(v(t))d\tau,\tag{13.25}$$

其中 $R\geqslant 0$ 为波动方程的黎曼函数. 由(13.23)、(13.24)和 A 的定义，我们有 $v\leqslant u$. 因此 $f(u)\leqslant f(v)$. 由(13.23)和(13.25)，有 $u\geqslant w$. 因此，$w\leqslant u\leqslant v$ 对一切 $x\in\mathbb{R}^3$, $t\in\mathbb{R}_+$ 成立. 因此，u 为点态有界，唯一性、正则性容易得到.

对于如下形式的 NLS 方程

$$iu_t=-\Delta u+\lambda|u|^{p-1}u,\qquad t\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}^n\tag{13.26}$$

$$u(t_0)=u_0(x),\tag{13.27}$$

其中 $t_0\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, 可以证明它的 L_2 解的存在性，有如下定理:

定理 4 设 $1<p<1+\dfrac{4}{n}$, 则对任何 $u_0\in L_2(\mathbb{R}^n)$ 和 $t_0\in\mathbb{R}$, 存在问题(13.26)、(13.27)的唯一整体解 $u(t)$, 使

$$u(t)\in C(\mathbb{R};L_2(\mathbb{R}^n))\cap L^r_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};L_{p+1}(\mathbb{R}^n)),\tag{13.28}$$

$$u(t)=U(t-t_0)u_0-i\int_{t_0}^t U(t-\tau)f(u(\tau))d\tau,\ t\in\mathbb{R},\tag{13.29}$$

$$\|u(t)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}=\|u_0\|_{L_2(\mathbb{R}^n)},\qquad t\in\mathbb{R},\tag{13.30}$$

其中 $r=\dfrac{4(p+1)}{n(p-1)}$, $U(t)=e^{i\Delta t}$, $f(z)=\lambda|z|^{p-1}z(z\in\mathbb{C})$. (13.29)中的积分为 $H^{-1}(\mathbb{R}^n)$上的博丝纳(S. Bochner)积分，更进一步，令模(j 其中 $j=1, 2, \cdots$)和 u_0 使得 u_{0j}、$u_0\in L_2(\mathbb{R}^n)$, $u_{0j}\to u_0$, 依 $L_2(\mathbb{R}^n)u_{0j}(\to\infty)$. 设 $u_j(t)$和 $u(t)$为(13.26)分别具初值 $u_j(t_0)=u_0$

和 $u(t_0)=u_0$ 的解，则对一切 $t\in\mathbb{R}$ 有

$$u_j(t)\to u(t)\ \text{依}\ L_2(\mathbb{R}^n)\ \text{模},\qquad j\to\infty.$$

考虑 NLS 方程外区域初边值的整体解．设 $n\geqslant 2$，Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的外区域具光滑边界 $\partial\Omega$．考虑如下初边值问题

$$\begin{cases} iu_t-\Delta u+f(|u|^2)u=0, & x\in\Omega,\ t>0, & (13.31)\\ u(x,\ 0)=u_0(x), & x\in\Omega, & (13.32)\\ u|_{\partial\Omega}=0, & t>0. & (13.33)\end{cases}$$

这里 $f(\cdot)$ 为实值函数，u_0 为给定的复值函数，有如下定理：

定理 5 设 n 为一整数，$n\leqslant 3$．如果满足以下条件：

(i) Ω 的补集 Ω^c 是星形的，即 Ω^c 是含有原点的有界区域，对任何 $y\in\partial\Omega^c$，有

$$y\cdot\nu(y)<0,$$

其中 $\nu(y)$ 表示在 $y\in\partial\Omega^c$ 上的内法线单位向量；

(ii) 存在实数 $\gamma\leqslant 2$，使得

$$W(w)=(2+n)F(w)-nf(w)w\leqslant\gamma F(w),\qquad \forall w\geqslant 0$$

其中 $F(w)=\int_0^w f(\sigma)d\sigma$；

(iii) $\gamma<0$，$F(w)\geqslant 0$，$\forall w\geqslant 0$；

(iv) $0\leqslant\gamma<2$，

$$-C_1w^{\frac{\gamma+2}{2}}\leqslant F(w)\leqslant C_2(w^{\frac{n}{n-2}}+w),\qquad \forall w\geqslant 0$$

其中 $\gamma\geqslant\frac{4}{n}$；

(v) $\gamma=2$，

$$-C_1w^{\frac{n+2}{n}}\leqslant F(w)\leqslant C_2w^{\frac{n+2}{n}};\qquad \forall w\geqslant 0$$

(vi) $f(s)\in C^3$，$s\in[0,\ \infty)$，对于 $p_2\geqslant p_1>2$ 有

$$|f(w)|\leqslant C_1w^{p_1/2}+C_2w^{p_2/2},\qquad \forall w\geqslant 0$$

$$|f'(w)|\leqslant C_3w^{\frac{p_1-2}{2}}+C_4w^{\frac{p_2-2}{2}},\qquad \forall w\geqslant 0$$

$$|f''(w)w|\leqslant C_5w^{\frac{p_1-2}{2}}+C_6w^{\frac{p_2-2}{2}}.$$

(vii) 当 $\gamma<2$ 时，

$$p_1>\max\left\{\frac{4}{2-\gamma},\ 2\right\},\qquad n=3,$$

$$p_1>\frac{2}{2-\gamma},\qquad n=1,\ 2,$$

当 $\gamma=2$ 时，

$$p_1>\max\left\{\frac{4}{2-k},\ 2\right\},\qquad n=3,$$

$$p_1>\frac{2}{2-k},\qquad n=1,\ 2,$$

其中 $0<k<2$，仅依赖于 $\|u_0\|_2$。

则存在正常数 δ，使得对任何 $u_0\in H^2\cap H_0^1$，$|x|u_0\in L_2$，且 $\|u_0\|_2<\delta$ 时，初边值问题(13.31)～(13.33)具有唯一整体解

$$u\in C([0,\ +\infty);H^2\cap H_0^1)\cap C^1([0,\ +\infty);L_2).$$

定理 6 设 $n\geqslant3$，k 为一整数，$k\geqslant\frac{n}{2}$，设 $f\in C^{2k}$，满足定理 5 条件(ii)，且对 $p_2\geqslant p_1\geqslant1$，

$$|f^{(m)}(w)w^{\frac{m}{2}}|\leqslant C_1w^{\frac{p_1}{2}}+C_2w^{\frac{p_2}{2}},\qquad \forall w\geqslant0,\ m=0,\ 1,\ \cdots,\ 2k$$

设满足定理 5 条件(iii)、(iv)、(v)．设当 $\gamma<2$ 时，

$$p_1>\frac{2n+2^*(4k-n)}{2^*(4k-n)}\max\left\{\frac{2}{2-\gamma},\ 1\right\},$$

当 $\gamma=2$ 时，

$$p_1>\frac{2n+2^*(4k-n)}{2^*(4k-n)}\max\left\{\frac{2}{2-k},\ 1\right\},$$

其中 $n\geqslant3$ 时，$2^*=2n/(n-2)$；$n=2$，2^* 为任意实数；$n=1$，$2^*=\infty$．则存在正常数 δ，使得对任何 $u_0\in H_0^1\cap H^{2k}$，$\triangle^ju_0\in H_0^1$．(其中 $j=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1$)，$|x|u_0\in L_2$，且 $\|u_0\|_{2k}<\delta$，存在初边值问题(13.31)～(13.33)的唯一整体解 u，使得

$$u\in C([0,\ +\infty);H^{2k}\cap H_0^1)\cap C^1([0,\ \infty);H^{2(k-1)}\cap H_0^1).$$

对于高维的 NLS 方程，可用别索夫(O. Besov)空间和索伯列

夫空间之间的嵌入关系，作更深入细致的先验估计，得到整体古典解.

考虑如下的非线性薛定谔方程

$$iu_t-\Delta u+f(|u|^2)u=0, \tag{13.34}$$

$$u(0,x)=u_0(x), \tag{13.35}$$

其中 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}$.

定理 6′ 设 $6\leqslant n\leqslant 9$, ρ 满足

$$1<\rho<\frac{n+2}{n-2}.$$

设 $k\in\mathbb{N}$, $k>\frac{n}{2}$, $k\geqslant 2$, $f\in C^{k+1}(\mathbb{R};\mathbb{R})$; $f(0)=0$. 设 f 满足条件:

$$|s^{(k+1)/2}f^{(k)}(s)|\leqslant Cs^{\frac{\rho}{2}}, \qquad s\in\mathbb{R}_+, \quad k=0,1$$

$$|s^{(k+1)/2}f^{(k)}(s)|\leqslant C, \qquad \forall s\geqslant 1, \quad k=2,3,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]$$

且

$$F(s)=\int_0^s f(\sigma)d\sigma\geqslant -C_1 s^{(1+r)/2}, \qquad \forall s\in\mathbb{R}_+$$

其中 C_1 为正常数, $r\in\mathbb{R}$, $1\leqslant r<1+\frac{4}{n}$.

则对任何 $u_0\in W^{k,2}(\mathbb{R}^n)$, 初值问题(13.34)、(13.35)具有唯一解 u, 使得

$$u\in C^0([0,\infty);W^{k,2}(\mathbb{R}^n))\cap C^1([0,\infty);W^{k-2,2}(\mathbb{R}^n)).$$

推论 6 如 $k>\frac{n}{2}+2$, 则在定理 6′ 的假设下, u 为初值问题(13.34)、(13.25)的整体古典解.

对于 $1\leqslant n\leqslant 6$, 问题(13.34)、(13.35)已得到整体光滑解; 利用对时间 t 的导数在别索夫空间的估计, 还可把定理 6′ 的结果推广到 $9\leqslant n\leqslant 11$.

对于高维 NLW 方程, 利用类似方法, 可得到类似的结果.

现来考察 NLS 方程和 NLW 方程解的破裂(blow up)问题. 先从 NLS 方程(13.2)具初值 $u(x,0)=\varphi(x)$ 开始. 我们有如下定理:

定理 7 设

$$uf(u) \leqslant \left(2+\frac{4}{n}\right)F(u), \qquad \forall u \in \mathbb{R} \quad (13.36)$$

如果 $E(\varphi)<0$, 则不存在 NLS 方程(13.2)的整体光滑解("光滑解"意味着充分可微和在无穷远处充分小).

证明 利用拟共形等式

$$\frac{d}{dt}\int\left[\frac{1}{2}|xu-2it\nabla u|^2+4t^2F(u)\right]dx=-2t\int k(u)dx,$$

其中 $k(u)=nf(u)\bar{u}-2(n+2)F(u)$, 我们有

$$\frac{d}{dt}\int[r^2|u|^2+4tx\cdot I_m(u\nabla\bar{u})+8t^2e]dx=-4t\int k(u)dx, \tag{13.37}$$

其中 $e=\frac{1}{2}|\nabla u|^2+F(u)$, $E(u)=\int e\,dx=E(\varphi)$. 再利用膨胀变换的恒等式

$$\frac{d}{dt}\int[x\cdot I_m(u\cdot\nabla\bar{u})]dx=-4E-\int k(u)dx, \tag{13.38}$$

联系等式(13.37)、(13.38), 可得

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\int r^2|u|^2\,dx-8t^2E-4t\int_0^t\int k(u)dx\,dt\right]$$

$$=\frac{d}{dt}\left[-4t\int k(u)dx\right].$$

上式可改写为

$$\frac{d^2}{dt^2}\int r^2|u|^2\,dx=16E+4\int k(u)dx. \tag{13.39}$$

条件(13.36)意味着 $k(u)\leqslant 0$, 因此

$$\int r^2|u|^2\,dx \leqslant 16Et^2+C_1t+C_0$$

对充分大的 t 是负的($E<0$), 而这是不可能的, 由此定理得证.

条件(13.36)能和存在定理的条件(13.8)比较一下. 对于 $f(u)=-|u|^{p-1}u$, (13.8)要求 $p<1+\frac{4}{n}$, 而(13.36)则要求 $p\geqslant 1+\frac{4}{n}$.

对于 NLW 方程，有如下定理：

定理 8 设

$$uf(u)\leqslant(2+\varepsilon)F(u), \qquad \forall u\in\mathbb{R} \quad (13.40)$$

对某 $\varepsilon>0$，如初值满足 $E(\varphi)<0$，则不存在 NLW 方程(13.1)的整体解．更详细地说，如果 $u\in C([0,\ T];\ X)$，$F(u)$和$uf(u)\in L_1((0,\ T)\times\mathbb{R}^n)$，$E<0$，且(13.40)成立，则 $T<\infty$．

例如 $f(u)=m^2u-|u|^{p-1}u$，$m>0$，则对任何 $p>1$，(13.40)成立；如果 $\int|u|^{p+1}dx$ 为 $\int(u_t^2+|\nabla u|^2+m^2u^2)dx$ 所控制，则 E 是负的．

在定理 8 中，假设 $E<0$ 能置换成更弱的条件：

$$\text{如 } E>0,\text{设 } \int uu_t dx\Big|_{t=0}>\sqrt{2E\int u^2\,dx\Big|_{t=0}}. \qquad (13.41)$$

定理 8 的证明 由伸缩变换，可得等式

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{1}{2}\int u^2\,dx\right]=\int[u_t^2-|\nabla u|^2-uf(u)]dx.$$

由此可得等式

$$\frac{d^2I}{dt^2}=(2+2\alpha)\int u_t^2dx+2\alpha\int|\nabla u|^2\,dx+\int[(2+4\alpha)F(u)$$
$$-uf(u)]dx-(2+4\alpha)E, \qquad (13.42)$$

其中 $I(t)=\int\frac{1}{2}u^2dx$．选取 $\alpha=\frac{\varepsilon}{4}$，由假设(13.42)右端最后二项为正，用 I 乘(13.2)，并忽略梯度项，有

$$I[I''+(2+4\alpha)E]>(1+\alpha)\int u_t^2\,dx\cdot\int u^2\,dx>(1+\alpha)(I')^2.$$

令 $H(t)=I(t)-E(t+\tau)^2$，则有

$$HH''>(1+\alpha)(H')^2.$$

选取 τ 充分大，使得 $H'(0)>0$，因此 $J=H^{-\alpha}$ 满足

$$J''(t)<0, \quad J(0)=0, \quad J'(0)<0,$$

由此可得

$$J(t)\leqslant J(0)+tJ'(0).$$

故存在 $T>0$, 使得 $J(T)=0$. 因此, 当 $t\to T$ 时, $\int u^2\,dx\to\infty$, 定理得证.

一般来说, NLW 方程具小初值(小的 L_∞ 模), 不满足 $E<0$, 因为非线性项将被线性项所控制, 例如 $f'(0)=0$. 因此这种解不会破裂. 但如果 $f'(0)=0$, 则小初值解仍可能破裂, 有如下定理:

定理 9 考虑方程

$$u_{tt}-\Delta u-|u|^p=0. \tag{13.43}$$

如果 $1<p\leqslant\gamma(n-1)$, 则不存在(13.43)具小初值 $u(0)\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的整体解, 其中函数 $\gamma(n)$ 为

$$\gamma(n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{n}+\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{2}{n}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

事实上, $n=3$, $\gamma(n-1)=\gamma(2)=1+\sqrt{2}$, 约翰(F. John)证明了具初值 C_c^∞ 的一切解破裂; 对 $n=1$, 条件为 $1<p<\infty$; $n=2$ 为 $1<p\leqslant(3+\sqrt{17})/2$; $n=4$, 为 $1<p\leqslant2$.

证明 设 $n=3$, 初值 $u(x,0)\in C_c^\infty$, 且满足

$$\int u(x,0)dx>0,\quad \int u_t(x,0)dx>0.$$

设初值的支集为 $\{|x|\leqslant k\}$, 令 $J(t)=\int u\,dx$, 对方程(13.43)进行积分, 由赫尔德不等式, 有

$$J''=\int|u|^p\,dx\geqslant J^pC(1+t)^{-3(p-1)}. \tag{13.44}$$

另一方面, 从(13.43), 因为 $R\geqslant0(n=3)$, 有

$$u(t)=u_0(t)+\int_0^t R(t-\tau)*|u(\tau)|^p\,d\tau\geqslant u_0(t),$$

其中 $u_0(t)$ 满足

$$(\partial_t^2-\Delta)u_0=0,\qquad u_0(0)=u(0),\qquad \partial_tu_0(0)=\partial_tu(0).$$

u_0 为自由波动方程的解, 满足

$$\int u_0\,dx=C_1+C_2t.$$

设 $C_1>0$, $C_2>0$, $u_0(x, t)$具有支集$\{t-k\leqslant |x| \leqslant t+k\}=A$, 因此由赫尔德不等式有

$$C_0+C_1t=\int_A u_0\,dx\leqslant\int_A u\,dx\leqslant C(1+t)^{2(p-1)/p}\left(\int|u|^p dx\right)^{1/p}.$$

从(13.44)有

$$J''=\int|u|^p dx\geqslant C(1+t)^{2-p}.$$

上式对 t 积分两次, 并注意到 $J(0)>0$、$J'(0)>0$, 有

$$J\geqslant C(1+t)^{4-p}, \qquad J'>0. \tag{13.45}$$

联立(13.44)、(13.45)及 $\varepsilon>0$, 有

$$\begin{aligned} J''&\geqslant J^{1+\varepsilon}J^{p-1-\varepsilon}C(1+t)^{-3(p-1)}\\ &\geqslant J^{1+\varepsilon}C(1+t)^{(4-p)(p-1-\varepsilon)}(1+t)^{-3(p-1)}\\ &=J^{1+\varepsilon}C(1+t)^{-\mu}, \end{aligned} \tag{13.46}$$

其中 $\mu=(p-1)^2+\varepsilon(4-p)$. 注意到因$1<p<1+\sqrt{2}$(13.46)及 ε 充分小, 有 $0<\mu<2$. (13.46)乘以 $J'>0$, 得

$$(J')^2\geqslant[J^{2+\varepsilon}C(1+t)^{-\mu}]'+\text{正项}.$$

因此,

$$J'\geqslant[J^{2+\varepsilon}C(1+t)^{-\mu}]^{\frac{1}{2}}=J^{1+\frac{\varepsilon}{2}}C(1+t)^{-\frac{\mu}{2}}.$$

于是,

$$J(t)\geqslant\left\{\frac{\varepsilon}{2}\left[C_0-C\int_0^t(1+\tau)^{-\frac{\mu}{2}}d\tau\right]\right\}^{-\frac{\varepsilon}{2}}.$$

从上式可知, 当 $t\to T$ 时,

$$C_0-C\int_0^t(1+\tau)^{-\frac{\mu}{2}}d\tau\to0, \quad J(t)\to\infty,$$

定理得证.

§14 KdV 方 程 等

1. 考虑广义 KdV 方程

$$\partial_t u+D^3u+a(u)Du=0, \tag{14.1}$$

具初值

$$u(x,0)=u_0(x), \qquad x\in\mathbb{R} \quad (14.2)$$

引进位势函数 $V(x)$，$V(0)=V'(0)=0$，$\alpha=-V''(0)$. 先考虑 L_2 解的唯一性.

定理 1 设 $V(\rho)$满足条件

$$|V''(\rho)|\leqslant C|\rho|^p, \qquad 0<p\leqslant 2 \quad (14.3)$$

且 $u_0\in L_2$，$T>0$(可能 $T=\infty$)，则(14.1)具有初值 $u(0)=u_0(x)$，在下述意义

$$u\in(L^{\infty}_{\text{loc}}\cap\mathscr{S}_w)([0,T];L_2),$$

$$(1+x_+)^{\frac{\beta}{2}}u\in L^{q_1}_{\text{loc}}([0,T];L_2), \qquad (14.4)$$

$$h^{\frac{1}{2}}_{\alpha_0}u\in L^{q}_{\text{loc}}([0,T];L_r) \qquad \alpha_0>0$$

下的解是唯一的，其中

$$\frac{2}{q_1}=\beta=\frac{1}{p}-\frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{2}-\frac{p}{4},$$

$$\frac{1}{q}<\frac{3}{4}-\frac{1}{2r}=\frac{1}{2}+\frac{p}{8},$$

$$x_+=\max\{x,0\},$$

$h_{\alpha_0}(x)$为非负连续函数，满足

$$h_{\alpha_0}(x)=e^{\alpha_0 x}, \qquad \alpha_0>0, \qquad x\leqslant 0,$$

$$0\leqslant h_{\alpha_0}(y)\leqslant h_{\alpha_0}(x)\leqslant \exp[\alpha_0(x-y)]h_{\alpha_0}(y), \qquad \forall x\geqslant y.$$

定理 2 设 $V(\rho)$满足(14.3)，其中 $p\geqslant 2$，$u_0\in L_2$，$T>0$，则初值问题(14.1)、(14.2)在下述意义

$$\chi_+(t+x)^{\frac{1}{u}}|u|^p\in L^{q_1}_{\text{loc}}([0,T),L_1), \qquad q_1>4$$

$$\chi_-(|u|^p)\in l^{\infty}(L^{q}_{\text{loc}}([0,T);L_1)), \qquad q_1>4$$

$$\chi_+u\in L^{q}_{\text{loc}}([0,T),L_1), \qquad q>\frac{4}{3}$$

$$\chi_-e^{\alpha x/2}u\in l^{\infty}(L^{q}_{\text{loc}}([0,T);L_{\infty})), \qquad q>\frac{4}{3}, \quad \alpha>0$$

下的解是唯一的，其中 χ_+ 表示 $\mathbb{R}^+$ 上的特征函数，χ_- 表示在 $\mathbb{R}^-$ 上的特征函数，空间 $l^s(L^q(I, L_r))$ 的模为

$$\|v; l^s(L^q(I, L_r))\| = \left\{\sum_{j\in s}\left[\int_I dt\left(\int |\chi_j v|^r dx\right)^{\frac{q}{r}}\right]^{\frac{s}{q}}\right\}^{\frac{1}{s}} < \infty.$$

现考虑 H^1 解的唯一性.

定理 3 设 $V''(\rho)$ 为绝对连续函数，$V''(0)=0$，V''' 为局部有界，$u_0\in H^1$，$T>0$，则初值问题(14.1)、(14.2)在下述意义

$$u\in(L^\infty_{loc}\cap C_w)([0, T); H^1), \quad \chi_+ Du\in L^1_{loc}([0, T); L_\infty)$$

下的解是唯一的.

对于如下形式的 KdV 方程的初边值问题

$$u_t+u_x+uu_x+u_{xxx}=0, \qquad x、t>0 \quad (14.5)$$

$$u(x, 0)=f(x), \qquad x\geqslant 0 \quad (14.6)$$

$$u(0, t)=g(t), \qquad t\geqslant 0 \quad (14.7)$$

整体光滑解的存在性，有如下定理：

定理 4 设 k 为正整数，$f\in H^{3k+1}(\mathbb{R}^+)$，$g\in H^{k+1}_{loc}(\mathbb{R}^+)$，且满足 $k+1$ 个相容条件

$$g^{(j)}(0)=\varphi^{(j)}(0), \qquad 0\leqslant j\leqslant k$$

其中 $\varphi^{(j)}(x)$ 定义如下：

$$\varphi^{(0)}(x)=f(x),$$

$$\varphi^{(j+1)}(x)=-\left\{\varphi^{(j)}_x+\varphi^{(j)}_{xxx}+\frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\varphi^{(i)}\varphi^{(j-i)}\right]_x\right\},$$

则存在问题(14.5)～(14.7)的唯一光滑解 u，

$$u\in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; H^{3k+1}(\mathbb{R}^+)). \qquad (14.8)$$

当 $k>1$，则在 $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ 上得到(14.5)～(14.7)的古典解.

2. 考虑广田(R. Hirota)方程的初值问题

$$i\psi_t+\alpha\psi_{xx}+i\beta\psi_{xxx}+i\gamma(|\psi|^2\psi)_x+\delta|\psi|^2\psi=0, \quad (14.9)$$

$$\psi(x, 0)=\psi_0(x), \quad x\in\mathbb{R}, \quad t\geqslant 0, \qquad (14.10)$$

其中 $i=\sqrt{-1}$，α、β、γ 和 δ 为实数，有以下结果：

定理 5(存在唯一性) 设 α、β、γ 和 δ 为实常数，$\beta\gamma\neq 0$，$\psi_0(x)\in H^k(\mathbb{R})$，则对任意正数 $T>0$，问题(14.9)、(14.10)存在唯一光

滑解 $\psi(x,t)\in W(k,T)$，其中

$$W(k,T)=\{u|\partial_t^s u\in L^\infty(0,T;H^{k-3s}(\mathbb{R})),$$

$$0\leqslant s\leqslant \frac{k}{3},\ k\geqslant 3\}. \tag{14.11}$$

定理 6（收敛性）　在定理 5 假设下，我们有

(i) 若以 ψ_δ 表示问题(14.9)、(14.10)的整体解，则存在一函数 $\psi\in W(k,T)$，使得

$$\psi_\delta\to\psi \text{ 依 } W(k,T)\text{弱*收敛}, \qquad \delta\to 0 \tag{14.12}$$

其中 ψ 为如下的 DNLS-KdV 方程

$$i\partial_t\psi+\alpha D_x^2\psi+i\beta\partial_x^3\psi+i\gamma\partial_x(|\psi|^2\psi)=0 \tag{14.13}$$

具初值(14.10)的解.

(ii) 若以 $\psi_{\alpha\delta}$ 表示问题(14.9)、(14.10)的整体解，则存在函数 $\psi\in W(k,T)$，使得

$$\psi_{\alpha\delta}\to\psi \text{ 依 } W(k,T)\text{ 弱*收敛}, \qquad \alpha,\ \delta\to 0$$

其中 ψ 为 MKdV 方程具初值(14.10)的唯一光滑解.

(iii) 设 $\alpha\neq 0$，$\gamma/\beta=\delta/\alpha$，若以 $\psi_{\beta\gamma}$ 表示问题(14.9)、(14.10)的整体解，则存在函数 $\psi\in W^*(k,T)$，使得

$$\psi_{\beta\gamma}\to\psi \text{ 依 } W^*(k,T)\text{弱*收敛}, \qquad (\beta,\ \gamma\to 0)$$

其中 ψ 为非线性薛定谔方程

$$i\partial_t\psi+\alpha D_x^2\psi+\delta|\psi|^2\psi=0 \tag{14.14}$$

具初值(14.10)的唯一光滑解，其中

$$W^*(k,T)=\left\{u|\partial_t^s u\in L^\infty(0,T;H^{k-2s}(R)),\ 0\leqslant s\leqslant\frac{k}{2},\ k\geqslant 3\right\}. \tag{14.15}$$

定理 7（光滑性和衰减估计）　在定理 5 条件下，以 $\psi(t,x)$ 表示初值问题(14.9)、(14.10)的整体光滑解，则有

(i) $\partial_t^r\psi\in L^2(0,T;H_{loc}^{k+1-3r}(\mathbb{R}))$，$r\leqslant\frac{k+1}{3}$；

(ii) 若 $\gamma_0\geqslant\frac{k-j}{2}$ 为实数，$0\leqslant j\leqslant k-3$，且 $|x|^{\gamma_0}\partial_x^j\psi_0\in$

$L_2(\mathbb{R})$，则有

$$\partial_x^j\psi(x,\ t)=O(|x|^{-\left(1-\frac{1}{2(k-j)}\right)\gamma_0}),\ |x|\to+\infty.$$

3. 考虑如下广义混合非线性薛定谔方程初值问题：

$$\begin{aligned} &u_t=i\alpha u_{xx}+\beta u^2\bar{u}_x-\gamma|u|^2u+ig(|u|^2)u, \\ &u(x,\ 0)=u_0(x),\ (x,\ t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+. \end{aligned} \tag{14.16}$$

它包含以下的物理模型：

(i) 阿布洛维茨(M. J. Ablowitz)方程

$$iu_t=u_{xx}-4iu^2\bar{u}_x+8|u|^4u. \tag{14.17}$$

(ii) Chen-Lee-Lin 方程

$$iu_t+u_{xx}+i\alpha|u|^2u_x=0. \tag{14.18}$$

(iii) 格吉科夫(V. S. Gerdjikov)-伊凡诺夫(I. Ivanov)方程

$$iu_t+u_{xx}-\beta|u|^2u-2\delta^2|u|^4u-2i\delta u^2\bar{u}_x=0. \tag{14.19}$$

(vi) 孔杜(A. Kundu)方程

$$\begin{aligned} &iu_t+u_{xx}+i\alpha(|u|^2u)_x+\beta|u|^2u \\ &\quad+8(4\delta+\alpha)|u|^4u+4i\delta(|u|_x^2)u=0 \end{aligned} \tag{14.20}$$

定理 8 设 α、β、γ 为实常数，$\alpha\neq0$，且实函数 $g(v)$ 和初值 $u_0(x)$ 满足以下条件：

(A1) $u_0(x)\in H^s(\mathbb{R})$，$g(v)\in C^s(\mathbb{R}^+)$，$s\geqslant3$ 为整数；

(A2) 存在两个实常数 $M\in\mathbb{R}$，$\delta\in(0,\ 2)$，使得

$$\operatorname{sgn}(\alpha)g(v)\leqslant M(1+v^2),\qquad \|u_0\|_2\leqslant M_1 \tag{14.21}$$

或

$$\operatorname{sgn}(\alpha)g(v)\leqslant M(1+v^{2-\delta})+M_0v^2, \tag{14.22}$$

其中常数 $M_0<(\beta+\gamma)(5\beta-3\gamma)/16|\alpha|$，$M_1$ 仅依赖于 α、β、γ，则对任何 $T>0$，初值问题(14.15)、(14.16)具有唯一光滑解

$$u(x,\ t)\in B_\infty^s(T)=\bigcap_{r=0}^{[s/2]}W_\infty^r(0,\ T;\ H^{s-2r}(\mathbb{R})).$$

定理 9 设 α、β、γ 为实常数，$\alpha\neq0$. 设

$u_0(x)\in H^s(\mathbb{R})$，$|x|^\rho D^ju_0(x)\in L_2(\mathbb{R})$，$j=0,\ 1,\ \cdots,\ k$，

其中 $\rho\in\left[\frac{1}{2},\ s\right]$, $k\leqslant s-2$, $s\geqslant 3$. 如果 $u(x,\ t)\in B^s_\infty(T)$ 是问题 (14.15)、(14.16)的解, 则有

$$|D^m u(x,\ t)|=O(|x|^{-\rho_m}),\qquad |x|\to\infty \quad (14.23)$$

其中 $t\in[0,\ T]$, $0\leqslant m\leqslant s-1$,

$$\rho_m=\min\left\{\rho,\ \frac{s-m-\frac{1}{2}}{s-k}\rho\right\}.$$

4. 考虑具有阻尼的多维非线性薛定谔方程的混合初边值问题:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}-\gamma\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_j}\right)+b(x)q(|\boldsymbol{u}|^2)\boldsymbol{u}+c(x,\ t)\boldsymbol{u}$$
$$=\boldsymbol{f}(x,\ t), \qquad (14.24)$$

$$\boldsymbol{u}(x,\ 0)=\boldsymbol{u}_0(x),\qquad x\in\Omega,\ t>0 \quad (14.25)$$

$$\left(\left(\sum a_{ij}(x)\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i}\right)\cos(\boldsymbol{n},\ x_j)+h(x)\boldsymbol{u}\right)\Big|_{\partial\Omega}=0, \qquad (14.26)$$

其中 $\boldsymbol{u}=(u_1(x,\ t),\ u_2(x,\ t),\ \cdots,\ u_N(x,\ t))$是未知复向量值函数, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为有界域, 且有光滑边界 $\partial\Omega\in C^2$, $\boldsymbol{n}$ 表示 $\partial\Omega$ 的单位法向量, $c(x,\ t)=(c_{ij}(x,\ t))$为 $N\times N$ 复函数矩阵,

$$\boldsymbol{f}(x,\ t)=(f_1(x,\ t),\ f_2(x,\ t),\ \cdots,\ f_N(x,\ t))$$

为已知复向量值函数, 实函数 $a_{ij}(x)(i,\ j=1,\ 2,\cdots,\ n)$、$h(x)$、$b(x)$ 和 $g(x)$ 满足以下假设:

(I) $\sum_{ij=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant a_0|\boldsymbol{\xi}|^2$, $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n)\in\mathbb{R}^n$, $a_0>0$, $a_{ij}=a_{ji}$, $a_{ij}\in C^1(\overline{\Omega})$.

(II) $c_{ij}(x,\ t)$, $\frac{\partial c_{ij}(x,\ t)}{\partial t}\in L^\infty(Q_T)(i,\ j=1,\ \cdots,\ N)$, $Q_T=\Omega\times(0,\ T)$.

(III) $b(x)\geqslant 0$, $h(x)\geqslant 0$, $g(s)\geqslant 0$, $h(x)\in C^0(\overline{\Omega})$, $g(s)\in C^1(\mathbb{R}^+)$, $b(x)\in C^0(\overline{\Omega})$.

(IV) $\boldsymbol{f}(x,\ t)$, $\boldsymbol{f}_t(x,\ t)\in L^\infty(0,\ T;L_2(\Omega))$, $\boldsymbol{u}_0(x)\in H^2(\Omega)$,

$\gamma=\gamma_0+i\gamma_1,\ \gamma_0\geqslant 0,\ |\gamma|>0.$

定理10 设 $a_{ij}\in C^0(\overline{\Omega})$, $\boldsymbol{u}_0\in H^2(\Omega)$, $\boldsymbol{f}(x,\ 0)\in L_2(\Omega)$, $g(s)\in C^1(\mathbb{R}^+)$, $g(|\boldsymbol{u}_0|^2)\boldsymbol{u}_0\in L_2(\Omega)$, 且

(i) $|c_{ij}(x,\ t)|\leqslant M_1$, $\left|\dfrac{\partial c_{ij}(x,\ t)}{\partial t}\right|\leqslant M_1$ (其中 $i, j=1, 2, \cdots, n$), $\|\boldsymbol{f}\|\leqslant M_2$, $\|\boldsymbol{f}_t\|\leqslant M_2$, M_1、M_2 为常数;

(ii) $a_{ij}=a_{ji}$ (其中 $i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$), $\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant a_0|\boldsymbol{\xi}|^2$, $\forall\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n$;

(iii) $\gamma=\gamma_0+i\gamma_1$, $\gamma_0\geqslant 0$, $0\leqslant b(x)$, $h(x)\leqslant M\,(M=\text{const})$;

(iv) $g(s)\geqslant 0$, $g'(s)\geqslant 0$, $\forall s\in[0,\ \infty)$, $g(s)\leqslant A_0s^{\frac{p}{2}}+B_0$ $(p>0)$,

其中 a_0 为正常数, A_0、B_0 为常数, 则问题(14.24)~(14.26)至少具有一弱解 $\boldsymbol{u}(x,\ t)$,

$$\boldsymbol{u}(x,\ t)\in L^\infty(0,\ T;\ H^1(\Omega))\cap W^{1,\infty}(0,\ T;\ L_2(\Omega)).$$

定理11 设 $a_{ij}\in C^1(\overline{\Omega})$, $\boldsymbol{u}_0(x)\in H^2(\Omega)$, $\boldsymbol{f}(x,\ 0)\in L_2(\Omega)$, $g(|\boldsymbol{u}_0|^2)\boldsymbol{u}_0\in L_2(\Omega)$, $g(s)\in C^1(R^+)$, 且

(i) $a_{ij}=a_{ji}$ (其中 $i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$), $0<a_1\leqslant a_{ij}\leqslant a_2$,

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant a_0\sum_{j=1}^{n}|\xi_i|^2,\ \forall\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n)\in\mathbb{R}^n.$$

(ii) $|c_{ij}(x,\ t)|\leqslant M_1$, $\left|\dfrac{\partial c_{ij}(x,\ t)}{\partial t}\right|\leqslant M_1$, $\|\boldsymbol{f}(\cdot,\ t)\|\leqslant M_2$,

$$\|\boldsymbol{f}_t(x,\ t)\|_{L_2(Q_T)}\leqslant M_2\quad(\text{其中 } M_1、M_2 \text{ 为常数}).$$

(iii) $g(s)\geqslant 0$, $g'(s)\geqslant 0$,

$$|g(s)|\leqslant A_0s^{\frac{p}{2}}+B_0,$$

其中 A_0、B_0 为正常数, 当 $1\leqslant n<3$ 时, $p\in(0,\ \infty)$; $n\geqslant 3$ 时, $p\in\left[0,\ \dfrac{4}{n-2}\right)$.

(iv) $0\leqslant b(x)$, $h(x)\leqslant M$ (M 为常数),

$$\gamma=\gamma_0+i\gamma_1,\quad \gamma_0\geqslant 0,\quad |\gamma|>0,$$

则问题(14.24)～(14.26)至少具有一个广义解 $\boldsymbol{u}(x, t)$,

$$\boldsymbol{u}(x, t)\in L^{\infty}(0, T; H^2(\Omega))\cap W^{1,\infty}(0, T; L_2(\Omega)).$$

5. 考虑如下广义非线性色散方程初值问题:

$$\partial_t u+\beta\partial_x^3 u+\delta\partial_x^2 H(u)+\gamma\partial_x H(u)+\partial_x g(u)=0, \tag{14.27}$$

$$u(x, 0)=\varphi(x), \qquad (x, t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \tag{14.28}$$

其中 β、δ、γ 为实常数.

$$H(u)=\frac{1}{\pi}p\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(y, t)}{y-x}\,dy \tag{14.29}$$

为希尔伯特变换, $p\cdot$表示柯西主值, 它包括具有物理意义的模型:

(i) 本杰明-小野-KdV 方程

$$\partial_t u+\beta\partial_x^3 u+\delta\partial_x^2 H(u)+\partial_x g(u)=0. \tag{14.30}$$

(ii) 广义 KdV 方程

$$\partial_t u+\beta\partial_x^3 u+\partial_x g(u)=0. \tag{14.31}$$

(iii) 本杰明-小野方程

$$\partial_t u+\delta\partial_x^2 H(u)+u\partial_x u=0. \tag{14.32}$$

定理 12 设 β、δ、γ 为常数, $\beta\neq 0$, $\gamma\leqslant 0$, 初值函数 $\varphi(x)\in H^k(\mathbb{R})$, $g(\cdot)\in C^k(\mathbb{R})$, 其中 $k\geqslant 3$, 如果存在常数 c, 使得

$$|g'(v)|\leqslant c(1+|v|^{\eta}),$$

其中 $0<\eta\leqslant 2$, 则柯西问题(14.27)、(14.28)存在唯一古典解 $u\in W_{\infty}^{r}(0, T; H^{k-3r}(\mathbb{R}))$, $r\leqslant\left[\frac{k}{3}\right]$.

定理 13 设 $u_{\delta\gamma}(x, t)\in W_{\infty}^{r}(0, T; H^{k-3r}(\mathbb{R}))$是柯西问题(14.27)、(14.28)的解, 则存在三个函数 u_δ、u_γ 和 u, 使得

(i) $\lim\limits_{\delta\to 0}u_{\delta\gamma}(x, t)=u_\gamma(x, t)$, 其中

$$u_\gamma(x, t)\in\bigcap_{r=0}^{\left[\frac{k}{3}\right]}W_{\infty}^{r}(0, T; H^{k-3r}(\mathbb{R}))$$

是柯西问题(14.33)、(14.34)

$$\partial_t u+\beta\partial_x^3 u+\gamma\partial_x H(u)+\partial_x g(u)=0, \tag{14.33}$$

$$u(x, 0)=\varphi(x) \tag{14.34}$$

的唯一整体光滑解.

(ii) $\lim\limits_{\gamma\to 0} u_{\delta\gamma}(x, t) = u_\delta(x, t)$, 其中

$$u_\delta(x, t) \in \bigcap_{r=0}^{\left[\frac{k}{3}\right]} W_\infty^r(0, T; H^{k-3r}(\mathbb{R}))$$

是柯西问题(14.30)、(14.28)的唯一整体光滑解.

(iii) $\lim\limits_{\substack{\delta\to 0\\ \gamma\to 0}} u_{\delta\gamma}(x, t) = \lim\limits_{\delta\to 0} u_\delta(x, t) = \lim\limits_{\gamma\to 0} u_\gamma(x, t) = u(x, t)$,

其中 $u(x, t) \in \bigcap\limits_{r=0}^{[k/3]} W_\infty^r(0, T; H^{k-3r}(\mathbb{R}))$是问题(14.31)、(14.28)的唯一整体光滑解.

6. 考虑非均匀介质中萨哈罗夫方程组的初值问题

$$\begin{cases} i\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_t + \Delta^2\boldsymbol{\varepsilon} - \nabla\cdot(n\nabla\boldsymbol{\varepsilon}) = 0, & (14.35) \\ n_t = \Delta\Phi, & (14.36) \\ \Phi_t = n + |\nabla\boldsymbol{\varepsilon}|^2, & (14.37) \\ \boldsymbol{\varepsilon}|_{t=0} = \boldsymbol{\varepsilon}_0(x),\ n|_{t=0} = n_0(x),\ \Phi|_{t=0} = \Phi_0(x),\ x\in\mathbb{R}^2, & (14.38) \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}(x, t) = (\varepsilon_1(x, t), \cdots, \varepsilon_N(x, t))$是未知复值函数, $n(x, t)$、$\Phi(x, t)$是未知实函数; $\Phi(x, t)$称为低频位势,

$$i = \sqrt{-1}, \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

定理 14 设满足以下条件:

(i) $\boldsymbol{\varepsilon}_0(x) \in H^{m+3}(\mathbb{R}^2)$, $n_0(x) \in H^{m+1}(\mathbb{R}^2)$,

$\Phi_0(x) \in H^{m+2}(\mathbb{R}^2)$, $m \geqslant 0$;

(ii) $\|\nabla\boldsymbol{\varepsilon}_0(x)\|^2 \leqslant \frac{2}{3}\|\psi(x)\|^2$,

其中 $\psi(x)$为如下方程

$$\Delta\psi - \psi + \psi^3 = 0$$

的基本解, 则初值问题(14.35)~(14.38)具有唯一整体光滑解 $\boldsymbol{\varepsilon}(x, t)$, $n(x, t)$, $\Phi(x, t)$, 使得

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, t) \in L^\infty(0, T; H^{m+3}(\mathbb{R}^2)),$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t(x, t) \in L^\infty(0, T; H^{m+1}(\mathbb{R}^2)),$$

$$n(x,t)\in L^\infty(0,T;H^{m+1}(\mathbb{R}^2)),$$
$$n_t(x,t)\in L^\infty(0,T;H^m(\mathbb{R}^2)),$$
$$\Phi(x,t)\in L^\infty(0,T;H^{m+2}(\mathbb{R}^2)),$$
$$\Phi_t(x,t)\in L^\infty(0,T;H^{m+1}(\mathbb{R}^2)).$$

考虑如下初边值问题

$$i\Delta\varepsilon_t+\Delta^2\varepsilon-\nabla(n\cdot\nabla\varepsilon)=0, \tag{14.39}$$

$$n_{tt}-\Delta n=\Delta(|\varepsilon|^2), \qquad x\in\Omega,\ t>0 \tag{14.40}$$

$$\varepsilon|_{t=0}=\varepsilon_0(x), \quad n|_{t=0}=n_0(x), \quad n_t|_{t=0}=n_1(x), \tag{14.41}$$

$$\varepsilon|_{\partial\Omega}=0, \quad \left.\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\nu^2}\right|_{\partial\Omega}=0, \quad n|_{\partial\Omega}=0, \quad t>0, \tag{14.42}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 为有界域，具光滑边界 $\partial\Omega\in C^2$，ν 为 $\partial\Omega$ 的单位外法线．我们有

定理 15 设 $\varepsilon_0(x)\in H^4(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，$n_0(x)\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，且

$$\|\nabla\varepsilon_0(x)\|\leqslant\lambda, \tag{14.43}$$

其中 λ 为某确定常数，则存在初边值问题(14.39)～(14.42)的唯一整体光滑解，使得

$$\varepsilon(x,t)\in L^\infty(0,T;H^4(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)),$$
$$\varepsilon_t(x,t)\in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)),$$
$$n(x,t)\in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)),$$
$$n_t(x,t)\in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)),$$
$$n_{tt}(x,t)\in L^\infty(0,T;L_2(\Omega)).$$

7. 考虑三维非线性薛定谔-布森内斯克方程组初值问题：

$$\begin{cases} i\varepsilon_t+\Delta\varepsilon-n\varepsilon-\beta|\varepsilon|^2\varepsilon=0, & (14.44)\\ n_t=\Delta\varphi, & (14.45)\\ \varphi_t=n+f(n)+\mu n_t-\lambda\Delta n+|\varepsilon|^2, & (14.46)\end{cases}$$

$$\varepsilon|_{t=0}=\varepsilon_0(x),\ n|_{t=0}=n_0(x),\ \varphi|_{t=0}=\varphi_0(x), \tag{14.47}$$

其中 $x\in\mathbb{R}^3$, $t\in\mathbb{R}^+$, $\mu>0$, $\lambda>0$, $\beta>2$, $i=\sqrt{-1}$,

$$\varepsilon(x,t)=(\varepsilon_1(x,t),\ \varepsilon_2(x,t),\ \cdots,\ \varepsilon_N(x,t))$$

是复值未知函数，$\eta(x, t)$、$\varphi(x, t)$是实值未知函数，$f(s)$ $(s\in\mathbb{R}^1)$、$\eta_0(x)$、$\varphi_0(x)$是已知实值函数，$\varepsilon_0(x)$是复值初值函数，

$$\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

定理16 设满足以下条件：

(i) $f(n)\in C^3$，$\int_0^n f(s)ds\geqslant 0$，

$$|f'(n)|\leqslant A|n|^{q-1},\quad 1\leqslant q\leqslant\frac{11}{3},\quad A>0;$$

(ii) $\mu>0$，$\lambda>0$，$\beta>2$；

(iii) $\varepsilon_0(x)\in H^4(\mathbb{R}^3)$，$n_0(x)\in H^4(\mathbb{R}^3)$，$\varphi_0(x)\in H^4(\mathbb{R}^3)$，

则存在初值问题(14.44)～(14.47)的整体解$\varepsilon(x, t)$，$\eta(x, t)$，$\varphi(x, t)$，使得

$$\begin{gathered}
\varepsilon(x, t)\in L^\infty(0, T; H^4(\mathbb{R}^3)),\\
\varepsilon_t(x, t)\in L^\infty(0, T; H^2(\mathbb{R}^3)),\\
\varepsilon_{tt}(x, t)\in L^\infty(0, T; L_2(\mathbb{R}^3));\\
n(x, t)\in L^\infty(0, T; H^4(\mathbb{R}^3)),\\
n_t(x, t)\in L^\infty(0, T; H^2(\mathbb{R}^3)),\\
n_{tt}(x, t)\in L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R}^3));\\
\varphi(x, t)\in L^\infty(0, T; H^4(\mathbb{R}^3)),\\
\varphi_t(x, t)\in L^\infty(0, T; H^2(\mathbb{R}^3)),\\
\varphi_{tt}(x, t)\in L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R}^3)).
\end{gathered}$$

定理17 设满足定理16的条件，且设

(i) $f(n)\in C^{2k-1}$，$k\geqslant 2$；

(ii) $\varepsilon_0(x)\in H^{2k}(\mathbb{R}^3)$，$n_0(x)\in H^{2k}(\mathbb{R}^3)$，$\varphi_0(x)\in H^{2k}(\mathbb{R}^3)$，

则存在初值问题(14.44)～(14.47)的整体光滑解：

$$\begin{gathered}
\varepsilon(x, t)\in L^\infty(0, T; H^{2k}(\mathbb{R}^3)),\\
D_t^j\varepsilon(x, t)\in L^\infty(0, T; H^{2(k-j)}(\mathbb{R}^3)),\ 0\leqslant j\leqslant k;\\
n(x, t)\in L^\infty(0, T; H^{2k}(\mathbb{R}^3)),\\
D_t^j n(x, t)\in L^\infty(0, T; H^{2k-(j+1)}(\mathbb{R}^3)),\ 0<j\leqslant k;
\end{gathered}$$

$$\varphi(x,\ t)\in L^\infty(0,\ T;\ H^{2k}(\mathbb{R}^3)),$$

$$D_t^j\varphi(x,\ t)\in L^\infty(0,\ T;\ H^{2k-(j+1)}(\mathbb{R}^3)),\ 0<j\leqslant k.$$

定理 18 设满足条件:

(i) $f(n)\in C^2$;

(ii) $\varepsilon_0(x)\in H^2(\mathbb{R}^3)$, $n_0(x)\in H^2(\mathbb{R}^3)$, $\varphi_0(x)\in H^2(\mathbb{R}^3)$,

则初值问题(14.44)~(14.47)的整体光滑解

$$\varepsilon(x,\ t),\ n(x,\ t),\ \varphi(x,\ t)\in L^\infty(0,\ T;\ C^2)$$

是唯一的.

8. 考虑耦合非线性波动方程初值问题:

$$u_t=u_{xxx}+6uu_x+2vv_x, \tag{14.48}$$

$$v_t=2(uv)_x, \tag{14.49}$$

$$u|_{t=0}=u_0(x),\ v|_{t=0}=v_0(x). \tag{14.50}$$

定理 19 设$(u_0(x),\ v_0(x))\in H^k(\mathbb{R})$, $k\geqslant 4$, 则初值问题(14.48)~(14.50)存在唯一的光滑解

$$(u,\ v)\in\bigcap_{s+3r\leqslant k}W_\infty^r(0,\ T;\ H^s(\mathbb{R})), \tag{14.51}$$

其中$W_\infty^r(0,\ T;\ H^k(\mathbb{R}))$表示索伯列夫空间: $D_t^sD_x^lf(x,\ t)\in L^\infty(0,\ T;\ L_2(\mathbb{R}))$, 这里$0\leqslant s\leqslant r$, $0\leqslant l\leqslant k$.

9. 考虑一类在深水中的非线性奇性积分-微分方程的初值问题:

$$u_t+2uu_x+Hu_{xx}+b(x,\ t)u_x+c(x,\ t)u=f(x,\ t), \tag{14.52}$$

$$u|_{t=0}=u_0(x),\qquad x\in\mathbb{R},\ t>0, \tag{14.53}$$

其中H为希尔伯特变换

$$Hu(x,\ t)=\frac{1}{\pi}P\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(y,\ t)}{y-x}dy, \tag{14.54}$$

$P\cdot$表示积分的柯西主值. 当$b(x,\ t)=c(x,\ t)=f(x,\ t)=0$时, (14.52)为

$$u_t+2uu_x+Hu_{xx}=0, \tag{14.55}$$

这就是深水波具孤立子解的著名的本杰明-小野方程.

定理 20 设$b(x,\ t)\in W_\infty^{(2,1)}(Q_T^*)$, $Q_T^*=\{x\in\mathbb{R},\ 0\leqslant t\leqslant T\}$,

$c(x, t)\in W_{\infty}^{(2,0)}(Q_T^*)$, $f(x, t)\in W_2^{(2,0)}(Q_T^*)$，且 $\varphi(x)\in H^2(\mathbb{R})$，则初值问题(14.52)、(14.53)存在整体广义解 $u(x, t)$，

$$u(x, t)\in L_\infty(0, T; H^2(\mathbb{R}))\cap W_\infty^{(1)}(0, T; L_2(\mathbb{R}))=\mathbb{Z}. \tag{14.56}$$

定理 21 设 $b(x, t)\in W_\infty^{(1,0)}(Q_T^*)$, $c(x, t)\in L_\infty(Q_T^*)$，则初值问题(14.52)、(14.53)的整体广义解 $u(x, t)\in\mathbb{Z}$ 是唯一的.

定理 22 设 $\varphi(x)\in H^M$, $M\geqslant 2$, 则本杰明-小野方程的初值问题(14.55)、(14.53)存在唯一的整体光滑解 $u(x, t)$,

$$u(x, t)\in\bigcap_{k=0}^{\left[\frac{M}{2}\right]} W_{\infty,\mathrm{loc}}^{(k)}(\mathbb{R}^+, H^{M-2k}(\mathbb{R})), \tag{14.57}$$

其中导数 $u_{x^r t^s}(x, t)\in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, L_2(\mathbb{R}))$, $0\leqslant 2s+r\leqslant M$.

§15 朗道-利弗席茨方程

1. 考虑一维朗道-利弗席茨方程初值问题:

$$\begin{cases} \boldsymbol{z}_t=\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{z}_{xx}, & x\in\mathbb{R}, \quad t>0 \quad (15.1)\\ \boldsymbol{z}(x, 0)=\boldsymbol{z}_0(x), \quad |\boldsymbol{z}_0(x)|=1. & x\in\mathbb{R} \quad (15.2)\end{cases}$$

定理 1 设初值函数 $D\boldsymbol{z}_0(x)\in H^k(\mathbb{R})$, $k\geqslant 3$, 满足 $|\boldsymbol{z}_0(x)|=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, 则初值问题(15.1)、(15.2)存在唯一的整体光滑解 $\boldsymbol{z}(x, t)$,

$$D\boldsymbol{z}(x, t)\in\sum_{s=0}^{[k/2]} W_\infty^s(0, T; H^{k-2s}(\mathbb{R})). \tag{15.3}$$

2. 考虑一维朗道-利弗席茨方程的线性初边值问题

$$\boldsymbol{z}_t=\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{z}_{xx}+\boldsymbol{f}(x, t, \boldsymbol{z}), \qquad 0<x<l, \quad t>0 \tag{15.4}$$

第一边界条件

$$\boldsymbol{z}(0, t)=\boldsymbol{z}(l, t)=0, \qquad t\geqslant 0 \tag{15.5}$$

第二边界条件

$$\boldsymbol{z}_x(0, t)=\boldsymbol{z}_x(l, t)=0, \qquad t\geqslant 0 \tag{15.6}$$

混合边界条件

$$z(0,\ t)=0,\ z_x(l,\ t)=0, \qquad t\geqslant 0 \quad (15.7)$$

或

$$z_x(0,\ t)=0,\ z(l,\ t)=0, \qquad t\geqslant 0 \quad (15.8)$$

和初始条件

$$z(x,\ 0)=z_0(x). \qquad 0\leqslant x\leqslant l \quad (15.9)$$

我们作如下假设:

(I) $f(x,\ t,\ z)$对 x 和 z 连续可微，且 3×3 雅可比导数矩阵 $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,\ t,\ z)$是半有界的，即存在常数 b，使

$$\xi\cdot f_z(x,\ t,\ z)\xi\leqslant b|\xi|^2, \qquad \xi\in\mathbb{R}^3 \quad (15.10)$$

且 $f_0(x,\ t)=f(x,\ t,\ 0)\in L_2(Q_T)$，$Q_T=\{0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$.

(II) $f(x,\ t,\ z)$满足

$$|f_x(x,\ t,\ z)|\leqslant c(x,\ t)|z|^3+d(x,\ t), \qquad (x,\ t,\ z)\in Q_T\times\mathbb{R}^3 \quad (15.11)$$

其中 $c(x,\ t)\in L_\infty(Q_T)$，$d(x,\ t)\in L_2(Q_T)$.

(III) $z_0(x,\ t)\in W_2^{(1)}(0,\ l)$，且满足边界条件.

定理 2 设满足假设(I)、(II)、(III)，则广义朗道-利弗席茨方程组第二初边值问题(15.4)、(15.6)、(15.9)存在整体弱解 $z(x,\ t)$,

$$z(x,\ t)\in L_\infty(0,\ T;W_2^{(1)}(0,l))\cap C^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)}(Q_T). \quad (15.12)$$

定理 3 设满足定理 2 的条件，且设 $f(x,\ t,\ 0)\equiv 0$，则广义朗道-利弗席茨方程组第一初边值问题(15.4)、(15.5)、(15.9)和混合初边值问题(15.4)、(15.7)(或(15.8))、(15.9)具有整体弱解

$$z(x,\ t)\in L_\infty(0,\ T;W_2^{(1)}(0,\ l))\cap C^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)}(Q_T).$$

定理 4 若 $b<0$，则对上述所有初边值问题的解 $z(x,\ t)$，有

$$\lim_{t\to\infty}\|z(\cdot,\ t)\|_{L_2(0,l)}=0. \quad (15.13)$$

现考虑半无界区域 $Q_T^*=\{0\leqslant x<\infty,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$上的第一边界问题

$$z(0,\ t)=0,\quad z(x,\ 0)=\varphi(x),\quad 0\leqslant x<\infty \quad (15.14)$$

和第二边界问题

$$z_x(0,\ t)=0,\quad z(x,\ 0)=\varphi(x).\quad 0\leqslant x<\infty \quad (15.15)$$

定理 5 设 $f(x,\ t,\ z)$ 和 $z_0(x)$ 在 Q_T^* 上满足条件(I)、(II)、(III)，且满足下列条件之一：

(IV$_1^*$) $\quad |f(x,\ t,\ z)|\leqslant\tilde{c}(x,\ t)F(z)+\tilde{d}(x,\ t),$

$$(x,\ t,\ z)\in Q_T^*\times\mathbb{R}^3 \quad (15.16)$$

其中 $F(z)$ 为 $z\in\mathbb{R}^3$ 的连续函数，$\tilde{c}(x,\ t)$ 和 $\tilde{d}(x,\ t)\in L_\infty(0,\ T;\ L_2(\mathbb{R}^+))$，或

(IV$_2^*$) $\quad |f(x,\ t,\ z)|\leqslant c(x,\ t)|z|^l+\tilde{d}(x,\ t), \quad (15.17)$

其中 $l\geqslant 0$, $c(x,\ t)\in L_\infty(Q_T^*)$, $\tilde{d}(x,\ t)\in L_\infty(0,\ T;\ L_s(\mathbb{R}^+))$, $1<s\leqslant 2$.

则广义朗道-利弗席茨方程组(15.4)具第二边界条件(15.15)存在整体弱解 $z(x,\ t)\in L_\infty(0,\ T;\ W^{(1)}(\mathbb{R}^+))\cap C_{loc}^{(\frac{1}{2},\frac{1}{4})}(Q_T^*)$.

3. 考虑一维朗道-利弗席茨方程的非线性初边值问题：

$$z_t=z\times z_{xx}+f(x,\ t,\ z),\qquad 0<x<l,\ t>0 \quad (15.18)$$

$$\begin{cases} z_x(0,\ t)=\operatorname{grad}\psi_0(t,\ z(0,\ t)), & t\geqslant 0\\ -z_x(l,\ t)=\operatorname{grad}\psi_1(t,\ z(l,\ t)), & t\geqslant 0\end{cases} \quad (15.19)$$

$$z(x,\ 0)=\varphi(x),\qquad 0\leqslant x\leqslant l \quad (15.20)$$

其中 $\psi_0(t,\ z)$ 和 $\psi_1(t,\ z)$ 是数量函数，"grad"表示对 z 的梯度算子．我们作如下假定：

(A) 函数 $\psi_0(t,\ z)$ 和 $\psi_1(t,\ z)$ 具有对 t 的连续导数和对 $t\in[0,\ T]$ 及 $z\in\mathbb{R}^3$ 的二阶连续混合导数

3×3 Hessian 矩阵 $H_0(t,\ z)=\operatorname{grad}\operatorname{grad}\psi_0(t,z)$ 和 $H_1(t,z)=\operatorname{grad}\operatorname{grad}\psi_1(t,\ z)$ 是非负定的，且

$$\operatorname{grad}\psi_0(t,\ 0)=\operatorname{grad}\psi_1(t,\ 0)=0.$$

(B) 矩阵 $f_z(x,\ t,\ z)$ 是半有界的，即存在常数 b，使得

$$\xi\cdot f_z(x,\ t,\ z)\xi\leqslant b|\xi|^2.$$

(C) $\varphi(x)\in H^2(0, l)$，且在$[0, l]$的端点上满足非线性边界条件.

定理 6 设满足条件(A)、(B)、(C)，则广义朗道-利弗席茨方程组非线性初边值问题(15.18)～(15.20)存在整体弱解

$$z(x, t)\in L_\infty(0, T; H^1(0, l))\cap C^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)}(Q_T).$$

考虑如下的混合边值问题：

$$\begin{cases}z_x(0, t)=\operatorname{grad}\psi_0(t, z(0, t)), & (15.21)\\ z(l, t)=0, & (15.22)\\ z(x, 0)=\varphi(x). & (15.23)\end{cases}$$

我们置换条件(A)为

(A′) 函数 $\psi_0(t, z)\in C^0$, $\psi_0z_t\in C^0$, $\psi_{0zz}\in C^0$, $\psi_0(t, z)$的 Hessian 矩阵 $H_0(t, z)=\operatorname{grad}\operatorname{grad}\psi_0(t, z)$是非负定的，且

$$\operatorname{grad}\psi_0(t, 0)=0, \qquad \varphi(l)=0.$$

定理 7 设满足条件(A′)、(B)、(C)且$f(l, t, 0)=0$，则朗道-利弗席茨方程组的混合非线性边值问题(15.18)、(15.21)、(15.22)、(15.23)存在整体弱解$z(x, t)$,

$$z(x, t)\in L_\infty(0, T; H^1(0, l))\cap C^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)}(Q_T).$$

考虑在半无界区域$Q_T^*=\{x\in\mathbb{R}^+, 0\leqslant t\leqslant T\}$上的混合非线性边值问题

$$z_x(0, t)=\operatorname{grad}\psi_0(t, z(0, t)), \qquad t\geqslant 0 \quad (15.24)$$

$$z(x, 0)=\varphi(x). \qquad 0\leqslant x<\infty \quad (15.25)$$

定理 8 设条件(A′)满足，且有

(B*) 雅可比导数矩阵f_z在$Q_T^*\times\mathbb{R}^3$上是半有界的，即存在常数b，使得

$$\xi\cdot f_z(x, t, z)\xi\leqslant b|\xi|^2. \qquad \forall\xi\in\mathbb{R}^3, \ (x, t, z)\in Q_T^*\times\mathbb{R}^3$$

(C*) $\varphi(x)\in H^1(\mathbb{R}^+)$且在$x=0$处满足边界条件(15.24).

(D*) $|f(x, t, z)|$, $|f_x(x, t, z)|$, $|f_t(x, t, z)|\leqslant a(x, t)F(z)+b(x, t)$或$|f(x,t,z)|$, $|f_x(x, t, z)|$, $|f_t(x, t, z)|$

$\leqslant c(x,\ t)|z|^{k}+d(x,\ t)$，其中 $a(x,\ t)$、$b(x,\ t)$、$d(x,\ t)\in L_{\infty}(0,\ T;\ L_2(\mathbb{R}^+))$、$c(x,\ t)\in L_{\infty}(Q_T^*)$，$k\geqslant 0$，$F(z)\in C^3$。则朗道-利弗席茨方程组半无界区域 Q_T^* 上的混合非线性边值问题(15.18)、(15.24)、(15.25)具有整体弱解 $z(x,\ t)$，

$$z(x,t)\in L_{\infty}(0,\ T;\ H^1(\mathbb{R}^+))\cap C_{\mathrm{loc}}^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)}(Q_T^*).$$

4. 考虑m维($m\geqslant 2$)朗道-利弗席茨方程初边值问题

$$z_t=z\times\Delta z+f(x,\ t,\ z),\qquad x\in\Omega,\ t>0 \quad (15.26)$$

$$z(x,\ t)=0,\ x\in\partial\Omega,\qquad 0\leqslant t\leqslant T \quad (15.27)$$

$$z(x,\ 0)=\varphi(x),\qquad x\in\Omega \quad (15.28)$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为有界区域，具有光滑边界 $\partial\Omega\in C^2$。

设以下条件满足：

(I_m) 3×3 雅可比导数矩阵 $\dfrac{\partial f(x,\ t,\ z)}{\partial z}$ 对 z 是半有界的，即存在常数 b，使得

$$\xi\cdot f_z\xi\leqslant b|\xi|^2. \qquad \forall\xi\in\mathbb{R}^3$$

(II_m) 方程组是齐次的，即 $f(x,\ t,\ 0)\equiv 0$，且

$$\begin{cases}|f(x,\ t,\ z)|\leqslant A|z|^l+B,\ 2\leqslant l\leqslant\dfrac{4}{m-2},\ (m>2)\\ |\nabla f(x,\ t,\ z)|\leqslant A|z|^{1+\frac{2}{m}}+B,\qquad A>0,\ B>0\end{cases}\quad(15.29)$$

(III_m) $\varphi(x)\in H_0^1(\Omega)$。

定理 9 设满足条件(I_m)、(II_m)、(III_m)，则朗道-利弗席茨方程组初边值问题(15.26)～(15.28)存在整体弱解

$$z(x,\ t)\in L_{\infty}(0,\ T;\ H_0^1(\Omega))\cap C^{\left(0,\ \frac{1}{3+\left[\frac{m}{2}\right]}\right)}(0,\ T;\ L_2(\Omega)).$$

定理 10 设 $f(x,\ t,\ z)\in C^2$，$x\in\mathbb{R}^m$，$z\in\mathbb{R}^3$，Jacobi 导数矩阵半有界，则初边值问题(15.26)～(15.28)的光滑解 $z(x,\ t)\in C^{(3,1)}(Q_T)$是唯一的。

定理 11 设满足如下条件：

(i) $\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{f}(x,\ t,\ \boldsymbol{z})\geqslant c_0|\boldsymbol{z}|^{2+\delta}$, $(x,\ t)\in Q_T$, $\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^3$, (15.30)
其中 $c_0>0$, $\delta>0$.

(ii) 初值函数 $\|\boldsymbol{\varphi}(x)\|_{L_2}>0$,
则初边值问题(15.26)～(15.28)的广义解 $\boldsymbol{z}(x,\ t)\in W_2^{(2,1)}(Q_T)$ 在有限时间内破裂，即存在 $t_0>0$，使得

$$\lim_{t\to t_0}\|\boldsymbol{z}(\cdot,\ t)\|_{L_p(\Omega)}=+\infty,\quad 2\leqslant p<\infty. \tag{15.31}$$

5. 考虑朗道-利弗席茨方程组的几何推广，即将 $\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^3$ 推广到 $\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^N(N>3)$ 的情况. 考虑如下推广的朗道-利弗席茨方程组，

$$\boldsymbol{z}_t={}^*[\boldsymbol{z}\wedge\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{z})\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}_{n-2}(\boldsymbol{z})\wedge\Delta\boldsymbol{z}]+f(x,\ t,\ \boldsymbol{z}), \tag{15.32}$$

其中 $\boldsymbol{z}=(z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_N)$ 为 N 维向量值函数($N\geqslant2$)，$x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\in\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}^+$, “$\wedge$”表示外积, “Δ”表示 n 维拉普拉斯算子, “*”表示 Hodge 星号算子, $\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{z})$ 表示 N 维向量值函数($k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-2$; $n\geqslant2$), $\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{f}(x,\ t,\ \boldsymbol{z})$ 表示 N 维向量值函数, $x\in\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}^+$, $\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^N$.

方程组(15.32)可改写为如下形式

$$\boldsymbol{z}_t=\mathscr{A}(\boldsymbol{z})\Delta\boldsymbol{z}+\boldsymbol{f}(x,\ t,\ \boldsymbol{z}), \tag{15.33}$$

其中 $\mathscr{A}(\boldsymbol{z})$ 为 $N\times N$ 矩阵, $\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^N$.

当 $N=2$ 时，(15.32)或(15.33)为具分量形式的非线性薛定谔方程;

当 $N=3$ 时, (15.32)变为

$$\boldsymbol{z}_t=\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{z})\times\Delta\boldsymbol{z}+\boldsymbol{f}(x,\ t,\ \boldsymbol{z}), \tag{15.34}$$

其中“×”表示两个三维向量的叉积; 当 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})\equiv\boldsymbol{z}$ 时, 则得到前面的朗道-利弗席茨方程组.

在一般情况下, 方程组(15.33)二阶导数项的系数矩阵 $\mathscr{A}(\boldsymbol{z})$ 是反对称的和零定的.

当 $n\geqslant3$ 时, $\det|\mathscr{A}(\boldsymbol{z})|=0$, 因此方程组(15.32)或(15.33)是强耦合的, 强退化的, 拟线性的.

当 $n=1$ 时, 对于方程组(15.32)的柯西问题, 前面提到的各类

初边值问题，可证明它的整体弱解 $z(x, t)\in L_\infty(0, T; H^1)$ 的存在性.

当 $n\geqslant 2$ 时，对于如下方程组的初边值问题

$$\begin{cases} z_t = {}^*[z\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_{n-2}\wedge\Delta z]+f(x, t, z), & (15.35)\\ z(x, t)=0, \qquad x\in\partial\Omega,\ 0\leqslant t<\infty & (15.36)\\ z(x, 0)=\varphi(x), \qquad x\in\Omega & (15.37)\end{cases}$$

可得到它的整体弱解

$$z(x, t)\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; H^1_0(\Omega))\cap C^{\left(0, \frac{1}{2+\left[\frac{n}{2}\right]}\right)}(\mathbb{R}^+; L_2(\Omega)),$$

其中 $z(x, t)=(z_1(x, t), z_2(x, t), \cdots, z_N(x, t))$，$a_k$ 为 $\mathbb{R}^N$ 中的线性无关的常数向量($k=2, 3, \cdots, n-2$).

6. 在黎曼流形上的朗道-利弗席茨方程组和调和映射.

设(M, γ)和(N, g)为两个紧的黎曼流形，$\dim M=n$. 先考虑 M 为无边的，$N=S^2$.

考虑如下的朗道-利弗席茨方程组($M\to S^2$)

$$z_t=-\alpha_1 z\times(z\times\Delta_M z)+\alpha_2 z\times\Delta_M z, \qquad (15.38)$$

其中 $\alpha_1>0$，α_2 为常数，Δ_M 拉普拉斯-贝尔特拉米算子，在局部坐标$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$下，

$$\begin{aligned}\Delta_M &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\gamma^{\alpha\beta}\sqrt{\gamma}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)\\ &=\gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}-\Gamma^k_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^k}.\end{aligned} \qquad (15.39)$$

调和映射 $M\to S^2$ 的热流方程组为

$$z_t=\Delta_M z+|\nabla z|^2 z, \qquad (15.40)$$

其中

$$|\nabla z|^2=\sum_{\alpha\beta}\sum_i\gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial u^i}{\partial x^\beta}. \qquad (15.41)$$

我们建立了调和映射和朗道-利弗席茨方程组的解的密切联系，并得到了以下结果：

(i) 在古典意义下，方程组(15.38)具初值 $z_0(x)$，

$$|z_0(x)|^2=1 \qquad x\in M \qquad (15.42)$$

的解和方程组

$$z_t-\alpha_1\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\gamma^{\alpha\beta}\sqrt{\gamma}\frac{\partial z}{\partial x^\alpha}\right)+\alpha_1|\nabla z|^2 z$$

$$+\alpha_2 z\times\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\gamma^{\alpha\beta}\sqrt{\gamma}\frac{\partial z}{\partial x^\alpha}\right) \tag{15.43}$$

具相同初值(15.42)的解是等价的.

因此，当 $\alpha_2=0$、$\alpha_1=1$ 时，朗道-利弗席茨方程组和调和映射的热流方程组(15.40)等价.

(ii) 在古典意义下，$z: M\to S^2$ 为调和映射，当且仅当 z 满足朗道-利弗席茨方程组(15.38)和 $z_t(x, t)=0$, $t\geqslant 0$.

令 $V(M^T; S^2)=\{z: M\times[\tau, T]\to S^2 | z$ 可测,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T}\int_M|\nabla z(\cdot, t)|^2 dM+\int_\tau^T\int_M(|\nabla^2 z|^2+|z_t|^2)dMdt<\infty\},$$

则有

(iii) 设 z_1、$z_2\in V(M^T; S^2)$ 为朗道-利弗席茨方程组(15.43)具初值 $z_1(x, 0)=z_2(x, 0)=z_0(x)$ 的解，则

$$z_1(x, t)=z_2(x, t).$$

(iv) 对任何初值 $z_0(x)\in H^{1,2}(M, S^2)$，除了有限点外，存在方程组(15.43)在 $M\times[0, +\infty)$上的唯一正则解. 在这些有限点 (x^k, T^k)上，$(1\leqslant k\leqslant K)$

$$\lim_{T\to T^k}\sup_{T<T^k}E_R(z(\cdot, t), x^k)>\varepsilon_1, \qquad R\in(0, R_0)$$

其中

$$E_R(z, x)=\int_{B_R^M(x)}e(z)dM, \qquad B_R^M(x)=\{y\in M\,|\,|x-y|_M<R\},$$

$$e(z)=\frac{1}{2}|\nabla z|^2, \qquad x=(x_1, x_2)\in M.$$

(v) 设 $n\geqslant 3$, M 为紧的光滑的 n 维无边的黎曼流形，$z_0: M\to S^2$, $z_0(x)\in H^{1,2}(M)$，则存在问题(15.38)、(15.42)的整体弱解 $z(x, t)$，其中

$$\int_0^T\int_M|z_t|^2 dMdt+\int_M|\nabla z|^2 dx$$

$$+\int_0^T\int_M|\nabla\cdot(\boldsymbol{z}\times\nabla\boldsymbol{z})|^2dxdt\leqslant c, \tag{15.44}$$

这里 $T<\infty$，常数 c 依赖于 T.

(vi) 设 $\boldsymbol{z}_0(x)\in H^m(M)(m\geqslant 2)$, $|\boldsymbol{z}_0(x)|^2=1$, $x=(x_1, x_2)\in M$，且

$$\|\nabla\boldsymbol{z}_0(x)\|\leqslant\lambda, \tag{15.45}$$

其中 λ 为适当小的常数，则存在问题(15.38)、(15.42)的唯一整体光滑解 $\boldsymbol{z}(x, t)$: $M\times[0, \infty)\to s^2$,

$$\boldsymbol{z}(x, t)\in L_\infty(0, T; H^m(M)). \tag{15.46}$$

设 M 为 n 维$(n\geqslant 3)$紧的具光滑边界的黎曼流形，考虑如下初边值问题:

$$\boldsymbol{z}_t=-\alpha_1\boldsymbol{z}\times(\boldsymbol{z}\times\Delta_M\boldsymbol{z})+\alpha_2\boldsymbol{z}\times\Delta_M\boldsymbol{z}+\boldsymbol{f}(x, t, \boldsymbol{z}), \tag{15.47}$$

$$\boldsymbol{z}(x, 0)=\boldsymbol{z}_0(x), \qquad x\in M \tag{15.48}$$

$$\left.\frac{\partial\boldsymbol{z}}{\partial\nu}\right|_{\partial M}=0, \qquad t\in\mathbb{R}^+ \tag{15.49}$$

则有

(vii) 设 $\boldsymbol{z}_0(x)\in H^1$，雅可比导数矩阵 $\dfrac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{z}}$ 满足半有界条件，且

$$|\boldsymbol{f}(x, t, \boldsymbol{z})|\leqslant A|\boldsymbol{z}|^l+B, \ 2\leqslant l\leqslant 2+\frac{4}{n-2} \quad (n\geqslant 2) \tag{15.50}$$

$$|\nabla\boldsymbol{f}(x, t, \boldsymbol{z})|\leqslant A|\boldsymbol{z}|^{1+\frac{2}{n}}+B, \quad t\in\mathbb{R}^+, \quad \boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^3 \tag{15.51}$$

A、$B>0$，则存在问题(15.47)～(15.49)的整体弱解 $\boldsymbol{z}(x, t)$,

$$\boldsymbol{z}(x, t)\in L_\infty(0, T; H^1(M))\cap C^{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{r^*}\right)}(0, T; L_r(M)),$$

其中 $r=\min\left\{\dfrac{2n}{l(n-2)}, \dfrac{n}{n-1}\right\}$, $\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{r^*}=1$.

第4章

某些非线性演化方程的相似解和潘勒韦性质

如所周知，如果一个常微分方程的可活动奇点都是单值的，即为简单极点，这样的常微分方程称为具有潘勒韦(P. Painlevé)性质. 经验表明，当常微分方程组具有潘勒韦性质时，这个方程组是可积的. 1981年，著名的孤立子问题专家阿布洛维茨(M. J. Ablowitz) 等人证明了：如果一个偏微分方程可用散射反演方法求解，则和这个偏微分方程相对应的用相似方法得到的常微分方程具有潘勒韦性质. 他们还猜测：对于一个给定的偏微分方程，如果所有由相似方法(如无穷小变换)或作适当的自变量、因变量的变换后所得到的常微分方程具有潘勒韦性质，则这个偏微分方程是“可积的”. 因此，系统的“可积性”和潘勒韦性质的关系，以及不同于量纲方法求相似解的无穷小变换，已成为人们研究偏微分方程性质的重要课题.

和常微分方程类似，对于给定的偏微分方程，如果它的解关于可活动奇性流形是单值的，则说它具有潘勒韦性质. 由此可研究该方程的贝克隆变换、Soliton 解以及方程的可积性质.

本章将通过许多偏微分方程实例，来研究经典和非经典的无穷小变换、无穷小算子的李代数结构，并具体求出相似方程或相似解；另一方面，以 KdV、非线性薛定谔、布森内斯克等方程为例，证明它们具有潘勒韦性质，并由此求出它们的贝克隆变换.

§16 古典无穷小变换

二阶偏微分方程：

$$H(u_{xx},\ u_{xt},\ u_{tt},\ u_x,\ u_t,\ u,\ x,\ t)=0 \qquad (16.1)$$

具有m个边界条件

$$B_\beta(u_x,\ u_t,\ u,\ x,\ t)=0, \qquad (16.2)$$

$(x,\ t)$在边界曲线

$$w_\beta(x,\ t)=0 \qquad \beta=1,\ 2,\ \cdots,\ m \qquad (16.3)$$

上，其中$u(x,\ t)$是因变量，$x,\ t$是独立变量. 把上述定解问题(16.1)、(16.2)、(16.3)记为系统S. 考虑如下的单参数(ε)的李变换群

$$\begin{cases} u^*=u^*(x,\ t,\ u;\ \varepsilon), \\ x^*=x^*(x,\ t,\ u;\ \varepsilon), \\ t^*=t^*(x,\ t,\ u;\ \varepsilon). \end{cases} \qquad (16.4)$$

设$u=\theta(x,\ t)$为系统S的一个解，我们在系统S中以v代替u，$x^*=x^*(x,\ t,\ \theta(x,\ t);\ \varepsilon)$代替$x$，$t=t^*(x,\ t,\ \theta(x,\ t);\ \varepsilon)$代替$t$，所得系统记以$S^*$. 设$v=\theta(x^*,\ t^*)$是系统$S^*$的一个解.

定义 如果当$u=\theta(x,\ t)$是系统S的一个解，则$V=u^*(x,\ t,\ \theta(x,\ t);\ \varepsilon)$也是系统$S^*$的解时，我们称系统$S$在变换(16.4)下是不变的.

由此可得$\theta(x,\ t)$必须满足具单参数ε的泛函方程

$$\begin{aligned} &\theta(x^*(x,\ t,\theta(x,\ t);\ \varepsilon),\ t^*(x,\ t,\theta(x,\ t);\ \varepsilon)) \\ &\quad =u^*(x,\ t,\ \theta(x,\ t);\ \varepsilon). \end{aligned} \qquad (16.5)$$

(16.4)关于$\varepsilon=0$展开，可得如下的无穷小项$(\eta,\ \zeta,\ \tau)(o(\varepsilon))$，

$$\begin{cases} u^*=u+\varepsilon\eta(x,\ t,\ u)+o(\varepsilon^2), \\ x^*=x+\varepsilon\zeta(x,\ t,\ u)+o(\varepsilon^2), \\ t^*=t+\varepsilon\tau(x,\ t,\ u)+o(\varepsilon^2). \end{cases} \qquad (16.6)$$

利用(16.6)，将泛函方程在$\varepsilon=0$展开：

$$\theta(x+\varepsilon\zeta(x, t, \theta)+o(\varepsilon^2), t+\varepsilon\tau(x, t, \theta)+o(\varepsilon^2))$$
$$=\theta(x, t)+\varepsilon\eta(x, t, \theta)+o(\varepsilon^2). \tag{16.7}$$

泛函方程(16.7)的 $o(\varepsilon)$ 项导致如下的 $\theta(x, t)$ 的一阶偏微分方程 $((\eta, \zeta, \tau))$:

$$\zeta(x, t, \theta)\theta_x+\tau(x, t, \theta)\theta_t=\eta(x, t, \theta). \tag{16.8}$$

称方程(16.8)为不变曲面条件. (16.8)的一般解可由如下的特征方程

$$\frac{dx}{\xi(x, t, \theta)}=\frac{dt}{\tau(x, t, \theta)}=\frac{d\theta}{\eta(x, t, \theta)} \tag{16.9}$$

得到. 原则上, 可以得到(16.9)的一般解, 它含有两个参数, 其中之一为独立变量 $\zeta(x, t, \theta)$, 称为相似变量, 而另一个为因变量 $f(\zeta)$, 我们可得相似形式

$$\theta=\mathscr{F}(x, t, f(\zeta)). \tag{16.10}$$

将(16.10)代入(16.1), 可得到 $f(\zeta)$ 应满足的常微分方程. 具体说来, 我们可从(16.9)的第一等式的积分, 得到

$$\zeta(x, t)=\text{const} \quad (\Rightarrow x=g(\zeta, t)). \tag{16.11}$$

它在 (x, t) 平面上定义相似曲线. 再从(16.9)第二个等式

$$\frac{dt}{\tau(g(\zeta, t), t, \theta)}=\frac{d\theta}{\eta(g(\zeta, t), t, \theta)}, \tag{16.12}$$

得到解

$$G(t, \zeta(x, t), \theta)=\text{const}=f(\zeta). \tag{16.13}$$

于是, 有(16.10)

$$\theta=\mathscr{F}(x, t, f(\zeta(x, t))).$$

为了寻求无穷小变换, 使得 $u=\theta(x, t)$ 是系统 S 的某个解, 而 $v=u^*(x, t; \theta(x, t); \varepsilon)$ 是系统 S^* 的相应的解, 我们必须计算一些导数变换的关系式. 例如

$$\frac{\partial x}{\partial x^*}=\frac{\partial}{\partial x^*}[x^*-\varepsilon\zeta(x, t, \theta)+o(\varepsilon^2)]$$
$$=1-\varepsilon\left[\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x^*}+\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x^*}\right]+o(\varepsilon^2)$$

$$=1-\varepsilon\left[\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\zeta}{\partial u}\theta_x\right]+o(\varepsilon^2). \tag{16.14}$$

类似地，有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial t^*}=-\varepsilon\left[\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial u}\theta_t\right]+o(\varepsilon^2),\\ \dfrac{\partial t}{\partial t^*}=1-\varepsilon\left[\dfrac{\partial\tau}{\partial t}+\dfrac{\partial\tau}{\partial u}\theta_t\right]+o(\varepsilon^2),\\ \dfrac{\partial t}{\partial x^*}=-\varepsilon\left[\dfrac{\partial\tau}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau}{\partial u}\theta_x\right]+o(\varepsilon^2),\end{cases} \tag{16.15}$$

$$u^*=u^*(x,\ t,\ \theta(x,\ t);\ \varepsilon)=\theta(x,\ t)+\varepsilon\eta(x,\ t,\theta)+o(\varepsilon^2).$$

由此，可得一阶导数和二阶导数的变换式

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^*}{\partial x^*}&=\frac{\partial[\theta(x,\ t)+\varepsilon\eta(x,\ t,\ \theta)]}{\partial x^*}+o(\varepsilon^2)\\ &=\frac{\partial[\theta(x,\ t)+\varepsilon\eta(x,\ t,\ \theta)]}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x^*}+\frac{\partial t}{\partial x^*}\theta_t+o(\varepsilon^2).\end{aligned} \tag{16.16}$$

将(16.14)、(16.15)代入(16.16)，可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^*}{\partial x^*}=\theta_x+\varepsilon&\left[\frac{\partial\eta}{\partial x}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}-\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\theta_x\right.\\ &\left.-\frac{\partial\tau}{\partial x}\theta_t-\frac{\partial\zeta}{\partial u}\theta_x^2-\frac{\partial\tau}{\partial u}\theta_x\theta_t\right]+o(\varepsilon^2).\end{aligned} \tag{16.17}$$

以 η_x、η_t 分别表示 $\dfrac{\partial u^*}{\partial x^*}$、$\dfrac{\partial u^*}{\partial t^*}$ 的无穷小，则有

$$\eta_x=\frac{\partial\eta}{\partial x}+\left[\frac{\partial\eta}{\partial u}-\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right]\theta_x-\frac{\partial\tau}{\partial x}\theta_t-\frac{\partial\zeta}{\partial u}\theta_x^2-\frac{\partial\tau}{\partial u}\theta_x\theta_t. \tag{16.18}$$

类似地，有

$$\eta_t=\frac{\partial\eta}{\partial t}+\left[\frac{\partial\eta}{\partial u}-\frac{\partial\tau}{\partial t}\right]\theta_t-\frac{\partial\zeta}{\partial t}\theta_x-\frac{\partial\tau}{\partial u}\theta_t^2-\frac{\partial\zeta}{\partial u}\theta_x\theta_t, \tag{16.19}$$

$$\eta_{xx}=\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\left(2\frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial u}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)\theta_x-\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}\theta_t$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial u}\right)\theta_x^2-2\frac{\partial^2\tau}{\partial x\,\partial u}\,\theta_x\theta_t \\
&-\frac{\partial^2\zeta}{\partial u^2}\,\theta_x^3-\frac{\partial^2\tau}{\partial u^2}\,\theta_x^2\theta_t+\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}-2\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\theta_{xx} \\
&-2\frac{\partial\tau}{\partial x}\,\theta_{xt}-3\frac{\partial\zeta}{\partial u}\,\theta_{xx}\theta_x \\
&-\frac{\partial\tau}{\partial u}\,\theta_{xx}\theta_t-2\frac{\partial\tau}{\partial u}\,\theta_{xt}\theta_x,
\end{aligned}
\tag{16.20}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_{tt}=&\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+\left(2\frac{\partial^2\eta}{\partial t\,\partial u}-\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}\right)\theta_t-\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\,\theta_x \\
&+\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2\tau}{\partial t\,\partial u}\right)\theta_t^2-2\frac{\partial^2\zeta}{\partial t\,\partial u}\,\theta_x\theta_t \\
&-\frac{\partial^2\tau}{\partial u^2}\,\theta_t^3-\frac{\partial^2\zeta}{\partial u^2}\,\theta_t^2\theta_x+\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}-2\frac{\partial\tau}{\partial t}\right)\theta_{tt} \\
&-2\frac{\partial\zeta}{\partial t}\,\theta_{xt}-3\frac{\partial\tau}{\partial u}\,\theta_{tt}\theta_t \\
&-\frac{\partial\zeta}{\partial u}\,\theta_{tt}\theta_x-2\frac{\partial\zeta}{\partial u}\,\theta_{xt}\theta_t,
\end{aligned}
\tag{16.21}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_{xt}=&\frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial t}+\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial u}-\frac{\partial^2\tau}{\partial t\,\partial x}\right)\theta_t \\
&+\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial t\,\partial u}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial t\,\partial x}\right)\theta_x-\frac{\partial^2\tau}{\partial x\,\partial u}\theta_t^2 \\
&+\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial u}-\frac{\partial^2\tau}{\partial u\,\partial t}\right)\theta_x\theta_t-\frac{\partial^2\zeta}{\partial t\,\partial u}\,\theta_x^2 \\
&-\frac{\partial^2\tau}{\partial u^2}\,\theta_x\theta_t^2-\frac{\partial^2\zeta}{\partial u^2}\,\theta_t\theta_x^2-\frac{\partial\tau}{\partial x}\,\theta_{tt} \\
&+\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}-\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial\tau}{\partial t}\right)\theta_{xt}-\frac{\partial\zeta}{\partial t}\,\theta_{xx} \\
&-2\frac{\partial\tau}{\partial u}\,\theta_t\theta_{xt}-2\frac{\partial\zeta}{\partial u}\,\theta_x\theta_{xt} \\
&-\frac{\partial\tau}{\partial u}\,\theta_x\theta_{tt}-\frac{\partial\zeta}{\partial u}\,\theta_t\theta_{xx}.
\end{aligned}
\tag{16.22}
$$

方程(16.1)在无穷小变换(16.4)下是不变的，因此有

$$
H(u^*_{x^*x^*},\ u^*_{x^*t^*},\ u^*_{t^*t^*},\ u^*_{x^*},\ u^*_{t^*},\ u^*,\ x^*,\ t^*)=0. \tag{16.23}
$$

因此，方程(16.1)在无穷小变换(16.4)下不变的充分必要条件是方程(16.23)中的无穷小项($o(\varepsilon)$)恒等于0. 我们把方程(16.23)看作具有自己无穷小变元的8个变元的方程，因此(16.1)在(16.4)变换下保持不变. 对于(16.1)给定的解 $u=\theta(x, t)$，它也满足以下方程

$$\eta_{xx}\frac{\partial H}{\partial u_{xx}}+\eta_{xt}\frac{\partial H}{\partial u_{xt}}+\eta_{tt}\frac{\partial H}{\partial u_{tt}}+\eta_x\frac{\partial H}{\partial u_x}+\eta_t\frac{\partial H}{\partial u_t}$$

$$+\eta\frac{\partial H}{\partial u}+\zeta\frac{\partial H}{\partial x}+\tau\frac{\partial H}{\partial t}=0. \tag{16.24}$$

为了寻求无穷小变换(16.4)，可从方程(16.24)得到，此时方程中含有各种 θ 的导数项，它的系数依赖于(θ, x, t)和未知的(η, ζ, τ). 合并同类项，使 θ 的各种导数的系数为0，即得到无穷小变换的决定方程，由此可解得(η, ζ, τ).

[例1] 求热传导方程

$$u_{xx}-u_t=0 \tag{16.25}$$

的相似解.

作无穷小(η, ζ, τ)的李群变换：

$$\begin{cases} u^*=u^*(x, t, u; \varepsilon)=u+\varepsilon\eta(x, t, u)+o(\varepsilon^2), \\ x^*=x^*(x, t, u; \varepsilon)=x+\varepsilon\zeta(x, t, u)+o(\varepsilon^2), \\ t^*=t^*(x, t, u; \varepsilon)=t+\varepsilon\tau(x, t, u)+o(\varepsilon^2), \end{cases} \tag{16.26}$$

使方程(16.25)在变换(16.26)下不变. 从(16.19)、(16.20)可知 $u=\theta(x, t)$满足

$$u^*_{x^*x^*}-u^*_{t^*}=\theta_{xx}-\theta_t+\varepsilon(\eta_{xx}-\eta_t)+o(\varepsilon^2),$$

其中

$$\eta_{xx}-\eta_t=\left[\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}-\frac{\partial\eta}{\partial t}\right]+\left[2\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial u}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right]\theta_x$$

$$+\left[\frac{\partial\tau}{\partial t}-\frac{\partial\eta}{\partial u}-\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}\right]\theta_t+\left[\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial u}\right]\theta_x^2$$

$$+\left[\frac{\partial\zeta}{\partial u}-2\frac{\partial^2\tau}{\partial x\partial u}\right]\theta_x\theta_t+\frac{\partial\tau}{\partial u}\theta_t^2$$

$$
-\frac{\partial^2\zeta}{\partial u^2}\theta_x^3-\frac{\partial^2\tau}{\partial u^2}\theta_x^2\theta_t+\left[\frac{\partial\eta}{\partial u}-2\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right]\theta_{xx}
$$

$$
-2\frac{\partial\tau}{\partial x}\theta_{xt}-3\frac{\partial\zeta}{\partial u}\theta_{xx}\theta_x-\frac{\partial\tau}{\partial u}\theta_{xx}\theta_t
$$

$$
-2\frac{\partial\tau}{\partial u}\theta_{xt}\theta_x, \tag{16.27}
$$

$u=\theta(x,t)$满足(16.25)，上式 θ_{xx} 用 θ_t 代入，可化简为

$$
\begin{aligned}
\eta_{xx}-\eta_t=&\left[\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}-\frac{\partial\eta}{\partial t}\right]+\left[2\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial u}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right]\theta_x\\
&+\left[\frac{\partial\tau}{\partial t}-2\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}\right]\theta_t+\left[\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial u}\right]\theta_x^2\\
&+\left[-2\frac{\partial\zeta}{\partial u}-2\frac{\partial^2\tau}{\partial x\partial u}\right]\theta_x\theta_t-\frac{\partial^2\zeta}{\partial u^2}\theta_x^3\\
&-\frac{\partial^2\tau}{\partial u^2}\theta_x^2\theta_t-2\frac{\partial\tau}{\partial x}\theta_{xt}-2\frac{\partial\tau}{\partial u}\theta_{xt}\theta_x.
\end{aligned}
\tag{16.28}
$$

方程(16.25)在变换(16.26)下保持不变仅当 $\eta_{xx}-\eta_t=0$，$\forall x, t$，$u=\theta(x,t)$. 在(16.28)中，令 θ 的相同导数项的系数为 0，即令 θ_x、θ_{tx}、θ_t、$\theta_x\theta_{tx}$、$\theta_t\theta_x$、θ_t^2 的系数为 0，而在 (16.28) 中仅保留不包含 θ 导数的项，则可求解 ζ、η、τ 满足的偏微分方程. 由此可得

$$
\begin{aligned}
&\theta_x\theta_{tx}: &&\frac{\partial\tau}{\partial u}=0,\\
&\theta_t\theta_x: &&\frac{\partial\zeta}{\partial u}=0,\\
&\theta_x^2: &&\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2}=0,
\end{aligned}
\tag{16.29}
$$

$$
\begin{cases}
\eta=f(x,t)u+g(x,t),\\
\zeta=X(x,t),\\
\tau=T(x,t),
\end{cases}
\tag{16.30}
$$

其中 f、g、X 和 T 为 x、t 的任意函数.

令 θ_{tx}、θ_t、θ_x 的系数和保留项为 0，可得

$$
T=T(t), \tag{16.31}
$$

$$2\frac{\partial X}{\partial x}-T'(t)=0, \tag{16.32}$$

$$\frac{\partial X}{\partial t}-\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+2\frac{\partial f}{\partial x}=0, \tag{16.33}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial f}{\partial t}=0, \tag{16.34}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-\frac{\partial g}{\partial t}=0. \tag{16.35}$$

我们注意 $g(x,\ t)$为方程(16.25)的任意解，可考虑 $g(x,\ t)=0$ 的情况，求解(16.31)～(16.34)，可得到热传导方程(16.25)的群变换为：

$$\begin{cases} \zeta=k+\delta t+\beta x+\gamma xt, \\ \tau=\alpha+2\beta t+\gamma t^2, \\ \eta=\left(-\gamma\left(\frac{x^2}{4}+\frac{t}{2}\right)-\frac{\delta x}{2}+\lambda\right)u, \end{cases} \tag{16.36}$$

其中 α、β、γ、δ、k、λ 是 6 个任意常数.

由特征方程

$$\frac{dx}{\zeta}=\frac{dt}{\tau}=\frac{du}{\eta} \tag{16.37}$$

可求出方程(16.25)的相似变元、相似形式和相似解，其中 ζ、τ、η 由(16.36)所确定. 我们分四种情况讨论：

(i) $\beta^2\neq\alpha\gamma$，$\zeta=\dfrac{x-(At+B)}{\sqrt{\alpha+2\beta t+\gamma t^2}}$，其中

$$A=\frac{k\gamma-\delta\beta}{\alpha\gamma-\beta^2}, \qquad B=\frac{k\beta-\delta\alpha}{\alpha\gamma-\beta^2}.$$

解的相似形式为

$$u=\theta(x,\ t)=F(\zeta)\frac{1}{(\alpha+2\beta t+\gamma t^2)^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{\gamma t+\beta-C}{\gamma t+\beta+C}\right)^{\rho}$$

$$\exp\left(-\frac{t}{4}(A^2+\gamma\zeta^2)+\frac{A\zeta}{2}\sqrt{\alpha+2\beta t+\gamma t^2}\right), \tag{16.38}$$

其中 $C=\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}$, $\rho=\frac{1}{2C}\left(\frac{\beta}{2}+\lambda+\frac{1}{4\gamma}(\delta^2-A^2C^2)\right)$.

将(16.38)代入热传导方程(16.25), 可得如下 $F(\zeta)$ 的常微分方程

$$F''+\beta\zeta F'+(D\zeta^2+E)F=0, \tag{16.39}$$

其中

$$D=\frac{\alpha\gamma}{2}, \qquad E=\frac{A^2C^2}{4\gamma}-\left(\lambda+\frac{\delta^2}{4}\right)=-2C\rho+\frac{\beta}{2}.$$

令 $z=\zeta\sqrt{C}$, $F(\zeta)=G(z)e^{-\frac{\beta\zeta^2}{4}}$, 则(16.39)化为

$$\frac{d^2G}{dz^2}+\left[\frac{1}{2}+\nu-\frac{1}{4}z^2\right]G=0, \tag{16.40}$$

其中

$$\nu=\frac{E-\frac{\beta}{2}}{C}-\frac{1}{2}=-2\rho-\frac{1}{2}.$$

这个方程是标准的超几何型, 它的解可表为抛物圆柱函数.

$$D_\nu(z),\ D_\nu(-z),\ D_{-\nu-1}(iz),\ D_{-\nu-1}(-iz),$$

其中任何两个都是(16.40)的线性无关解. 它们有许多共知的性质.

$$D_\nu(z)=2^{\frac{\nu}{2}}e^{-\frac{z^2}{4}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)}, F_1\left(-\frac{1}{2}\nu,\frac{1}{2};\frac{1}{2}z\right)^2\right.$$

$$\left.+2^{-\frac{1}{2}}z\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\nu\right)}, F_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu;\frac{3}{2};\frac{1}{2}z^2\right)\right].$$

对于整数 $\nu=n=0, 1, 2, \cdots$, 解可表为正交埃尔米特(Ch. Hermite)多项式

$$D_n(z)=e^{-\frac{z^2}{4}}He_n(z),$$

$$He_n=(-1)^n e^{\frac{z^2}{2}}\frac{d^n}{dz^n}e^{-\frac{z^2}{2}},$$

$$He_0=1,\ He_1=z,\ He_2=z^2-1,\ \cdots\cdots;$$

而 $$D_{-1}(z)=e^{\frac{z^2}{4}}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\operatorname{erfc}(2^{-\frac{1}{2}}z),\ \cdots\cdots,$$
$D_\nu(z)$的级数表示对于小的 z 而 $|z|\gg|\nu|$，有

$$D_\nu(z)=\begin{cases} z^\nu e^{-\frac{z^2}{4}}[1+o(z^{-2})], & \text{当 } |\arg z|<\frac{3}{4}\pi \text{ 时}, \\ z^\nu e^{-\frac{z^2}{4}}[1+o(z^2)]-\frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(-\nu)}e^{\nu\pi i}z^{-\nu-1}e^{\frac{z^2}{4}} & \\ \quad\cdot[1+o(z^{-2})], & \text{当 } \frac{5}{4}\pi>\arg z>\frac{\pi}{4} \text{ 时}, \\ z^\nu e^{-\frac{z^2}{4}}[1+o(z^{-2})]-\frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(-\nu)}e^{-2\pi i}z^{-\nu-1}e^{\frac{z^2}{4}} & \\ \quad\cdot[1\pm o(z^{-2})], & \text{当 } -\frac{\pi}{4}>\arg z>-\frac{5}{4}\pi \text{ 时}. \end{cases}$$

抛物圆柱函数是 z 的整函数.

(ii) $\beta^2=\alpha\gamma$, $\gamma\neq 0$,

$$\zeta=\left[x+\delta+\frac{k-\delta\beta}{2(t+\beta)}\right]\frac{1}{t+\beta}.$$

解的相似形式为

$$\theta=\frac{F(\zeta)}{\sqrt{t+\beta}}\exp\left[\frac{L^2}{12(t+\beta)^3}+\frac{M}{t+\beta}-\frac{L\zeta}{2(t+\beta)}-\frac{\zeta^2(t+\beta)}{4}\right], \tag{16.41}$$

其中

$$L=\frac{k-\delta\beta}{2},\qquad M=-\left(\frac{\beta}{2}+\lambda+\frac{\delta^2}{4}\right).$$

$F(\zeta)$满足方程

$$\frac{d^2F}{d\zeta^2}-[2\zeta-M]F=0. \tag{16.42}$$

令 $z=L^{\frac{1}{3}}\zeta$, $F(\zeta)=G(z)$, (16.42)变为

$$\frac{d^2G}{dz^2}-(z-\nu)G=0, \tag{16.43}$$

其中

$$\nu=\frac{M}{L^{2/3}}.$$

Airy 函数 $A_i(z-\nu)$和 $B_i(z-\nu)$是(16.43)的线性无关解，它

们能被表示为具 3^{-1} 阶的贝塞尔函数. 若令 $w=\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}$, 则

$$A_i(z)=\pi^{-1}\sqrt{\frac{z}{3}}\,K_{\frac{1}{3}}(w),$$

$$A_i(-z)=\frac{1}{3}\sqrt{z}\,[J_{\frac{1}{3}}(w)+J_{-\frac{1}{3}}(w)].$$

$$B_i(z)=\sqrt{\frac{z}{3}}[I_{-\frac{1}{3}}(w)+I_{\frac{1}{3}}(w)].$$

$$B_i(-z)=\sqrt{\frac{z}{3}}[J_{-\frac{1}{3}}(w)-J_{\frac{1}{3}}(w)].$$

(iii) $\beta^2=\alpha\gamma$, $\beta=\gamma=0$, $\alpha\neq0$,

$$\zeta=x-\frac{\delta t^2}{2\alpha}-\frac{k}{\alpha}t.$$

解的相似形式为

$$u=\theta(x,\ t)=F(\zeta)\exp\left[-\frac{\delta^2}{12}t^3-\frac{k\delta t^2}{4}+\lambda t-\frac{\delta}{2}\zeta t\right], \tag{16.44}$$

其中 $F(\zeta)$满足方程

$$\frac{d^2F}{d\zeta^2}+k\frac{dF}{d\zeta}+\left[\frac{\delta}{2}\zeta-\lambda\right]F=0. \tag{16.45}$$

令 $z=-\left(\frac{\delta}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\zeta$, $F(\zeta)=G(z)e^{-\frac{k}{2}\zeta}$, $\delta\neq0$, 则由(16.45)变为

$$\frac{d^2G}{dz^2}-(z-\nu)G=0, \tag{16.46}$$

其中

$$\nu=-\left(\frac{k^2}{4}+\lambda\right)\left(\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

(16.46)与方程(16.45)相同, 若 $k=0$, 则用古典的分离变量法可得

$$u=e^{\lambda t}(A\cos\sqrt{-\lambda}\,x+B\sin\sqrt{-\lambda}\,x).$$

(iv) $\alpha=\beta=\gamma=0$, $\delta\neq0$, $\zeta=t$. 此时, 解的相似形式为

$$u=\theta(x,\ t)=F(t)e^{\frac{x}{4(1+k)}(\lambda-x)}, \tag{16.47}$$

其中 $F(t)$ 满足一阶方程

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\lambda^2-8(t+k)}{16(t+k)^2}F(t),$$

因此

$$\theta(x,\ t)=\frac{P}{\sqrt{t+k}}e^{-\frac{\left(x-\frac{\lambda}{2}\right)^2}{4(t+k)}}.$$

[例 2] 求非线性热传导方程的相似解.

考虑如下的非线性热传导方程:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial u}{\partial t},\tag{16.48}$$

具初边值条件

$$u(x,\ 0)=0,\qquad x>0,\tag{16.49}$$

$$u(0,\ t)=f(t),\quad t\geqslant 0.\tag{16.50}$$

我们考虑定解问题 (16.48)~(16.50) 在无穷小变换下的不变性. 首先考虑(16.48)的不变性质. 设李群无穷小变换为

$$\begin{cases}u^*=u+\varepsilon\eta(x,\ t,\ u)+o(\varepsilon^2),\\ t^*=t+\varepsilon\tau(x,\ t,\ u)+o(\varepsilon^2),\\ x^*=x+\varepsilon\zeta(x,\ t,\ u)+o(\varepsilon^2),\end{cases}\tag{16.51}$$

则易于验证: 对任何 $k(u)$, 有

$$\tau_u=\xi_u=\tau_x=0.\tag{16.52}$$

保留的决定方程为

$$\zeta_t+2K'(u)\eta_x-K(u)\zeta_{xx}+2K(u)\eta_{xu}=0,\tag{16.53}$$

$$K(u)\tau'(t)+\eta K'(u)-2K(u)\xi_x=0,\tag{16.54}$$

$$K'(u)\tau'(t)+K'(u)\eta_u+\eta K''(u)-2K'(u)\zeta_x+K(u)\eta_{uu}=0,\tag{16.55}$$

$$K(u)\eta_{xx}-\eta_t=0.\tag{16.56}$$

从(16.54)解出 η, 代入(16.56), 可得

$$\zeta=\frac{x}{2}\tau'(t)+ax^2+bx+c,\quad \tau=\tau(t),\ \eta=\frac{K(u)}{K'(u)}(4ax+2b),\tag{16.57}$$

其中 a、b、c 为任意常数. 将(16.57)代入(16.55), 可得: 若 a、b 中

的一个不为 0，则有

$$\left(\frac{K}{K'}\right)''=0, \tag{16.58}$$

因此

$$K(u)=\lambda(u+k)^{\nu}, \tag{16.59}$$

其中 λ、k、ν 为任意常数.

最后，将(16.57)代入(16.53)，可得

$$\frac{x}{2}\tau''(t)+2aK(u)\left[7-\frac{4K(u)K''(u)}{(K'(u))^2}\right]=0. \tag{16.60}$$

出现三种情况，分别讨论之.

(i) $K(u)$任意，三参数(α, β, γ)的不变群.

$$\zeta=\beta x+\gamma, \quad \tau=2\alpha+2\beta t, \quad \eta=0. \tag{16.61}$$

(ii) 四参数(α, β, γ, δ)的不变群.

$$\begin{aligned} &K(u)=\lambda(u+k)^{\nu}, \quad \zeta=\beta x+\gamma+\delta x, \\ &\tau=2\alpha+2\beta t, \qquad \eta=\frac{2\delta}{\nu}(u+k) \end{aligned} \tag{16.62}$$

(极限情况为 $K(u)=\lambda e^{\nu u}$).

(iii) 五参数(α, β, γ, δ, ρ)的不变群.

$$K(u)=\lambda(u+k)^{-\frac{4}{3}},$$

$$\begin{cases} \zeta=\beta x+\gamma+\delta x+\rho x^2, \\ \tau=2\alpha+2\beta t, \\ \eta=-\dfrac{3}{2}\delta(u+k)-3\rho(u+k). \end{cases} \tag{16.63}$$

考虑边界条件及初边界条件(16.49)、(16.50). 由 $t=0$ 的不变性，推出 $\alpha=0$. 由 $x=0$ 的不变性，推出 $\gamma=0$. (16.50) 的不变性推出

$$\eta(o,\ t,\ f(t))=2f'(t). \tag{16.64}$$

因此，

对于情形 (i)，$f(t)=\text{const}=1$.

情形(ii)，

$$f(t)=ct^{B}, \tag{16.65}$$

其中 B、C 是任意常数($\delta=\beta\nu B$)。

情形 (iii)，

$$f(t)=ct^{B}, \tag{16.66}$$

其中 B、C 为任意常数($\delta=\beta\nu B$)。

无论如何，情形 (iii) 是没有意义的，因为当 $u=0$ 时方程(16.48)没有意义。现对情况(i)和(ii)作进一步分析。

(i) $K(u)$任意，$f(t)=1$，特征方程为

$$\frac{dx}{x}=\frac{dt}{2t}=\frac{du}{0}. \tag{16.67}$$

由此可得相似变元为

$$\zeta=\frac{x}{\sqrt{t}} \tag{16.68}$$

($t=0$, $\zeta=\infty$; $x=0$, $\zeta=0$)．解的相似形式为

$$u=F(\zeta). \tag{16.69}$$

将(16.69)代入(16.48)，可得 $F(\zeta)$满足的如下的常微分方程

$$\frac{d}{d\zeta}\left(K(F)\frac{dF}{d\zeta}\right)+\frac{\zeta}{2}\cdot\frac{dF}{d\zeta}=0, \tag{16.70}$$

$F(\zeta)$满足相应的边界条件

$$F(\infty)=0,\quad F(0)=1.$$

(ii) $K(u)=\lambda u^{\nu}$, $f(t)=ct^{B}$,

特征方程为

$$\frac{dx}{(1+\nu B)x}=\frac{dt}{2t}=\frac{du}{2Bu}. \tag{16.71}$$

推出相似变元为

$$\zeta=\frac{x}{t^{(\nu B+1)/2}}. \tag{16.72}$$

(设 $\nu B>-1$, $t=0$ 推出 $\zeta=\infty$, $x=0$ 推出 $\zeta=0$。)解的相应的相似形式为

$$u = t^B F(\zeta). \tag{16.73}$$

将(16.73)代入(16.48)，可得 $F(\zeta)$满足的常微分方程

$$\lambda \frac{d}{d\zeta}\left(F^\nu \frac{dF}{d\zeta}\right) + \frac{\nu B+1}{2}\zeta\frac{dF}{d\zeta} - BF = 0. \tag{16.74}$$

$F(\zeta)$满足相应的边界条件

$$F(\infty)=0, \quad (B>0), \quad F(0)=C. \tag{16.75}$$

注意到单参数 μ 伸屈群

$$\zeta^* = \mu\zeta, \quad F^* = \mu^{\frac{2}{\nu}} F \tag{16.76}$$

使(16.74)保持不变，事实上，令

$$z = \frac{1}{\zeta}, \qquad G(z) = F\left(\frac{1}{z}\right), \tag{16.77}$$

则(16.76)、(16.77)变成

$$\lambda z^2 \frac{d}{dz}\left(G^\nu z^2 \frac{dG}{dz}\right) - \left(\frac{\nu B+1}{2}\right) z\frac{dG}{dz} - BG = 0, \tag{16.78}$$

具边界条件

$$G(0)=0, \qquad G(\infty)=C. \tag{16.79}$$

(16.78)在李群

$$z^* = \mu z, \qquad G^* = \mu^{-\frac{2}{\nu}} G \tag{16.80}$$

下是不变的. 设 $G=g(z)$是满足方程(16.78)和初值条件

$$g(0)=0, \qquad g'(0)=1 \tag{16.81}$$

的一个解，设 $g(\infty)=g_\infty \neq 0$，因为(16.78)在变换(16.80) 下不变，因此对任何 μ，

$$G(z) = \mu^{\frac{2}{\nu}} g(\mu z) \tag{16.82}$$

也是(16.78)的解，则

$$G(\infty) = \mu^{\frac{2}{\nu}} g_\infty, \quad G(0)=0,$$

选取 μ，使得

$$\mu = \left(\frac{c}{g_\infty}\right)^{\frac{\nu}{2}},$$

则由(16.82)可知 $G(z)$ 为问题(16.78)、(16.79)的解.

[例 3] 布森内斯克方程

$$u_{tt}+\frac{1}{2}(u^2)_{xx}+u_{xxxx}=0. \tag{16.83}$$

设有对 (x, t, u) 的单参数李群无穷小变换为

$$\zeta=x+\varepsilon X(x, t, u)+o(\varepsilon^2), \tag{16.84}$$

$$\tau=t+\varepsilon T(x, t, u)+o(\varepsilon^2), \tag{16.85}$$

$$\eta=u+\varepsilon U(x, t, u)+o(\varepsilon^2), \tag{16.86}$$

$$\eta_\zeta=u_x+\varepsilon U^x+o(\varepsilon^2), \tag{16.87}$$

$$\eta_{\zeta\zeta}=u_{xx}+\varepsilon U^{xx}+o(\varepsilon^2), \tag{16.88}$$

$$\eta_{\zeta\zeta\zeta\zeta}=u_{xxxx}+\varepsilon U^{xxxx}+o(\varepsilon^2), \tag{16.89}$$

$$\eta_{\tau\tau}=u_{tt}+\varepsilon U^{tt}+o(\varepsilon^2), \tag{16.90}$$

其中函数 U^x、U^{xx}、U^{xxxx} 和 U^{tt} 可由方程(16.84)～(16.86)确定. 布森内斯克方程(16.83)在变换(16.84)～(16.86)下如果

$$\eta_{\tau\tau}+\frac{1}{2}(\eta^2)_{\zeta\zeta}+\eta_{\zeta\zeta\zeta\zeta}=0 \tag{16.91}$$

是不变的, 由(16.84)～(16.90), 考虑 ε 的一次项, 则有

$$U^{tt}+uU^{xx}+u_{xx}U+2u_xU^x+U^{xxxx}=0. \tag{16.92}$$

如前面所做的, 无穷小 $X(x, t, u)$、$T(x, t, u)$ 和 $U(x, t, u)$ 将由解某些决定方程得到. 可求得

$$X=\alpha x+\beta, \quad T=2\alpha t+\gamma, \quad U=-2\alpha u, \tag{16.93}$$

其中 α、β、γ 为任意常数. 由求解特征方程

$$\frac{dx}{X(x, t, u)}=\frac{dt}{T(x, t, u)}=\frac{du}{U(x, t, u)},$$

可得相似形式.

(i) $\alpha=0$, 这是行波解, $u(x, t)=f(z)$, $z=\gamma x-\beta t$, $f(z)$ 满足

$$\beta^2 f+\frac{1}{2}\gamma^2 f^2+\gamma^4\frac{d^2 f}{dz^2}=Az+B, \tag{16.94}$$

其中 A、B 为积分任意常数. 对 $\gamma=0$, 可得第一潘勒韦方程

$$\frac{d^2 w}{dz^2}=6w^2+z. \tag{16.95}$$

(ii) $\alpha\neq0$, 此时有

$$u(x, t)=\frac{g(z)}{\left(t+\frac{\gamma}{2\alpha}\right)}, \qquad z=\frac{x+\frac{\beta}{\alpha}}{\left(t+\frac{\gamma}{2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{16.96}$$

其中 $g(z)$ 满足

$$\frac{z^2}{4}\frac{d^2g}{dz^2}+\frac{7z}{4}\frac{dg}{dz}+2g+g\frac{d^2g}{dz^2}+\left(\frac{dg}{dz}\right)^2+\frac{d^4g}{dz^4}=0, \tag{16.97}$$

它能由第四潘勒韦方程

$$\frac{d^2w}{dz^2}=\frac{1}{2w}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2+\frac{3}{2}w^3+4zw^2+2(z^2-a)w+\frac{b}{w} \tag{16.98}$$

求解得到.

§17 无穷小算子的李代数结构

我们以§16中热传导方程 $u_{xx}-u_t=0$ 的群变换

$$\begin{cases}\zeta=k+\delta t+\beta x+\gamma xt,\\ \tau=\alpha+2\beta t+\gamma t^2,\\ f=-\gamma\left(\frac{x^2}{4}+\frac{t}{2}\right)-\frac{\delta}{2}x+\lambda,\end{cases} \tag{17.1}$$

来说明无穷小算子的李代数结构.

定义1 对于具单参数 ε 的李群变换

$$\begin{cases}u^*=U^*(x, t, u; \varepsilon)=u+\varepsilon\eta(x, t, u)+o(\varepsilon^2),\\ x^*=X^*(x, t, u; \varepsilon)=x+\varepsilon\zeta(x, t)+o(\varepsilon^2),\\ t^*=T^*(x, t, u; \varepsilon)=t+\varepsilon\tau(x, t)+o(\varepsilon^2),\end{cases} \tag{17.2}$$

我们把

$$\mathscr{X}=\zeta(x, t)\frac{\partial}{\partial x}+\tau(x, t)\frac{\partial}{\partial t}+\eta(x, t, u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{17.3}$$

称为**无穷小算子**. 在 $\varepsilon=0$ 的某个邻域内, 有

$$u^* = e^{\varepsilon\mathscr{X}}u = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n \mathscr{X}^n}{n!}\right]u$$

$$= u + \varepsilon\eta(x, t, u) + \frac{\varepsilon^2}{2!}\left[\zeta(x, t)\frac{\partial\eta}{\partial x} + \tau(x, t)\frac{\partial\eta}{\partial t}\right.$$

$$\left. + \eta(x, t, u)\frac{\partial\eta}{\partial u}\right] + \cdots\cdots, \tag{17.4}$$

$$x^* = e^{\varepsilon\mathscr{X}}x = x + \varepsilon\zeta(x, t) + \frac{\varepsilon^2}{2!}\left[\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \tau\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right] + \cdots\cdots, \tag{17.5}$$

$$t^* = e^{\varepsilon\mathscr{X}}t = t + \varepsilon\tau(x, t) + \frac{\varepsilon^2}{2!}\left[\zeta\frac{\partial\tau}{\partial x} + \tau\frac{\partial\tau}{\partial t}\right] + \cdots\cdots. \tag{17.6}$$

对任何函数 $\mathscr{F}(x, t, u) \in C^\infty$，有

$$\mathscr{F}(x^*, t^*, u^*) = e^{\varepsilon\mathscr{X}}\mathscr{F}(x, t, u). \tag{17.7}$$

设 $\mathscr{X}_j (j=1, 2, \cdots, 6)$ 表示(17.1)中分别对应于参数 k、α、λ、β、γ 和 δ 的无穷小算子，则有

$$\begin{cases} \mathscr{X}_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}, \quad \mathscr{X}_2 = \dfrac{\partial}{\partial t}, \quad \mathscr{X}_3 = u\dfrac{\partial}{\partial u}, \\ \mathscr{X}_4 = x\dfrac{\partial}{\partial x} + 2t\dfrac{\partial}{\partial t}, \\ \mathscr{X}_5 = xt\dfrac{\partial}{\partial x} + t^2\dfrac{\partial}{\partial t} - \left(\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{t}{2}\right)u\dfrac{\partial}{\partial u}, \\ \mathscr{X}_6 = t\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{x}{2}u\dfrac{\partial}{\partial u}. \end{cases} \tag{17.8}$$

定义 2 如果李代数 $\mathscr{L}$ 的每个元素对于运算 $\otimes$ 满足如下组合律(也称交换)：

(i) 若 $\mathscr{X} \in \mathscr{L}$, $\mathscr{D} \in \mathscr{L}$，则 $\mathscr{X} \otimes \mathscr{D} \in \mathscr{L}$（封闭性）；

(ii) $\mathscr{X} \otimes \mathscr{D} = -\mathscr{D} \otimes \mathscr{X}$；

(iii) 若 $\mathscr{L}$、$\mathscr{X}$、$\mathscr{D}$、$w \in \mathscr{L}$，则有 Jacobi 恒等式

$$\mathscr{X} \otimes (\mathscr{D} \otimes w) + \mathscr{D} \otimes (w \otimes \mathscr{X}) + w \otimes (\mathscr{X} \otimes \mathscr{D}) = 0,$$

则称李代数 $\mathscr{L}$ 是定义在某域 $\mathscr{F}$ 上的向量空间.

显然，三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 上的具有向量的叉积运算"$\otimes$"的向量集是李代数的典型例子. 我们知道，具李群变换的无穷小算子在实数或复数域上形成一个向量空间. 为了使这个向量空间变为李代数 μ，需要引入交换算子[·，·]：

若 $\mathscr{X}$，$\mathscr{D}\in\mu$，则

$$\mathscr{X}\otimes\mathscr{D}=[\mathscr{X},\ \mathscr{D}]=\mathscr{X}D-\mathscr{D}\mathscr{X},$$

其中[$\mathscr{X}$，$\mathscr{D}$]表示无穷小算子 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{D}$ 的交换子. 容易验证上述组合律 (i)～(iii) 均满足. 对于每个李代数，交换子的表能被建立起来. 对于无穷小算子(17.8)，有如下的交换子表：

	$\mathscr{X}_1$	$\mathscr{X}_2$	$\mathscr{X}_3$	$\mathscr{X}_4$	$\mathscr{X}_5$	$\mathscr{X}_6$
$\mathscr{X}_1$	0	0	0	$\mathscr{X}_1$	$\mathscr{X}_6$	$-\frac{1}{2}\mathscr{X}_3$
$\mathscr{X}_2$	0	0	0	$2\mathscr{X}_2$	$\mathscr{X}_4-\frac{1}{2}\mathscr{X}_3$	$\mathscr{X}_1$
$\mathscr{X}_3$	0	0	0	0	0	0
$\mathscr{X}_4$	$-\mathscr{X}_1$	$-2\mathscr{X}_2$	0	0	$2\mathscr{X}_5$	$\mathscr{X}_6$
$\mathscr{X}_5$	$-\mathscr{X}_6$	$-\mathscr{X}_4+\frac{1}{2}\mathscr{X}_3$	0	$-2\mathscr{X}_5$	0	0
$\mathscr{X}_6$	$\frac{1}{2}\mathscr{X}_3$	$-\mathscr{X}_1$	0	$-\mathscr{X}_6$	0	0

从上表可以看出，(17.8)的李代数是由算子 $\mathscr{X}_1$、$\mathscr{X}_2$ 和 $\mathscr{X}_5$ 所形成的，例如

$[\mathscr{X}_1,\ \mathscr{X}_5]=\mathscr{X}_6$，　　即由 $\mathscr{X}_1$ 和 $\mathscr{X}_5$ 生成 $\mathscr{X}_6$，

$[\mathscr{X}_1,\ \mathscr{X}_6]=-\dfrac{1}{2}\mathscr{X}_3$，　　即由 $\mathscr{X}_1$ 和 $\mathscr{X}_6$ 生成 $\mathscr{X}_3$，

$[\mathscr{X}_2,\ \mathscr{X}_5]=\mathscr{X}_4-\dfrac{1}{2}\mathscr{X}_3$，　　即由 $\mathscr{X}_2$，$\mathscr{X}_5$ 和 $\mathscr{X}_3$ 生成 $\mathscr{X}_4$.

§18 非经典的无穷小变换

对于给定的偏微分方程 $Lu=0$，同时利用 $Lu=0$ 和不变曲面条件

$$X(x,\ t,\ u)\frac{\partial u}{\partial x}+T(x,\ t,\ u)\frac{\partial u}{\partial t}=U(x,\ t,\ u),\quad (18.1)$$

其中具单参数的无穷小变换为

$$\begin{cases}x'=x+\varepsilon X(x,\ t,\ u)+o(\varepsilon^2),\\ t'=t+\varepsilon T(x,\ t,\ u)+o(\varepsilon^2),\\ u'=u+\varepsilon U(x,\ t,\ u)+o(\varepsilon^2),\end{cases}\quad (18.2)$$

可得到非古典的无穷小变换．即此无穷小变换不能由§16中经典的无穷小变换得到．因而，我们可得到新解．

现以伯格斯方程

$$Lu=u_t+uu_x-u_{xx}=0 \quad (18.3)$$

为例来说明之．注意到(18.1)中实际上只有二个独立无穷小，因此可设 $T(x,\ t,\ u)=1$．于是，不变曲面条件(18.1)为

$$u_t=U-Xu_x. \quad (18.4)$$

从(18.4)有

$$u_{tx}=U_x+U_uu_x-Xu_{xx}-X_xu_x-X_uu_x^2,$$

因为 u 满足方程(18.3)，有 $u_{xx}=u_t+uu_x$，再利用(18.4)，可得

$$u_{tx}=(U_x-XU)+(U_u+X^2-X_x-Xu)u_x-X_u(u_x)^2. \quad (18.5)$$

利用(18.4)和(18.3)，可得

$$u'u'_{x'}-uu_x=\varepsilon\{(uU_x)+(U+uU_u-uX_x)u_x$$
$$+(-X_uu)(u_x)^2\}+o(\varepsilon^2),$$
$$u'_{t'}-u_t=\varepsilon\{(U_t+UU_x)+(-XU_u-X_t-X_uU)u_x$$
$$+(X_uX)u_x^2\}+o(\varepsilon^2),$$
$$-(u'_{x'x'}-u_{xx})=\varepsilon\{(-U_{xx}-UU_u+2UX_x)+[X_{xx}-2U_{xu}$$

$$-(u-X)(U_u-2X_x)+3X_uU]u_x+[2X_{xu}-U_{uu}$$
$$+3X_u(u-X)]u_x^2+X_{uu}(u_x)^3\}+o(\varepsilon^2).$$

由不变条件可得 u_x、u_x^2、u_x^3 的系数以及不包含 u_x 的项为 0.

u_x^3 的系数 $X_{uu}=0$ 推出

$$X=C_2(x,\ t)u+C_1(x,\ t). \tag{18.6}$$

u_x^2 的系数

$$U_{uu}=2X_{xu}+2uX_u-2XX_u.$$

由(3.6)可得

$$U_{uu}=2[(C_2)_x+C_2(1-C_2)u-C_2C_1],$$

因此

$$U=B(x,\ t)u+D(x,\ t)+u^2[(C_2)_x-C_2C_1]+\frac{1}{3}u^3C_2(1-C_2). \tag{18.7}$$

由 u_x 和 $(u_x)^0$ 项的系数分别为 0, 可得

$$U-X_t-(2U_{xu}-X_{xx})+uX_x-2XX_x=0, \tag{18.8}$$

$$U_t+uU_x-U_{xx}+2UX_x=0. \tag{18.9}$$

于是, 对于伯格斯方程相似解的确定, 转化为研究方程组(18.8)、(18.9)、(18.6)、(18.7)的求解. 一般说来, 要找出这些方程的一般解是困难的. 我们仅考虑某些特解.

由特征方程

$$\frac{dx}{X}=\frac{dt}{1}=\frac{du}{U} \tag{18.10}$$

的第一个等式, 可得相似变元 $\eta(x,\ t)=\text{const}$, 由此可得 $X=x(t,\ \eta)$; 由(18.10)的第二个等式, 积分, 可得相似形式. 为简单计, 设 $C_2=0$, 则由(18.6)、(18.7)可得

$$X=C_1(t)=A(x,\ t),\qquad U=B(x,\ t)u+D(x,\ t). \tag{18.11}$$

将(18.11)代入(18.8)和(18.9), 得

$$Bu+D-A_t-2B_x+A_{xx}+uA_x-2AA_x=0, \tag{18.12}$$

$$B_t u + D_t + u(B_x u + D_x) - (B_{xx} u + D_{xx}) + 2(Bu + D)A_x = 0. \tag{18.13}$$

因为 A、B 和 D 与 u 无关，令上述方程 u 和 u^2 的系数为 0，则由(18.12)可得

$$B = -A_x. \tag{18.14}$$

由(18.13)可得

$$B_t + D_x - B_{xx} + 2BA_x = 0, \tag{18.15}$$

$$B_x = 0. \tag{18.16}$$

由方程(18.16)推出 $B = B(t)$. 从(18.14)有

$$A = -B(t)x + E(t). \tag{18.17}$$

于是，方程(18.15)变为 $B_t + D_x - 2B^2 = 0$. 由此推出 $D_x = F(t) - 2[B(t)]^2 - B'(t)$，则有

$$D = F(t)x + G(t). \tag{18.18}$$

作为(18.14)～(18.18)的推论，方程(18.12)、(18.13)归结为

$$D - A_t - 2AA_x = 0, \quad D_t + 2DA_x = 0.$$

我们要求出 B、E、F 和 G.

(i) $E = 0$,

$$X = A = \frac{x}{2t + m}, \quad m = \text{const},$$

$$U = -\frac{u}{2t + m},$$

相似变元 $$\eta = \frac{x}{\sqrt{2t + m}},$$

相似形式 $$f(\eta) = u\sqrt{2t + m},$$

$$f'' + f'(\eta - f) + f = 0.$$

(ii) $E = -RB$, $G = b\left[\left(\frac{b^2}{2}\right)(t + d)^2 + c\right]^{-1}$，其中 R、b、c、d 为常数，

$$X = A = -\frac{G'}{2G}(x + R),$$

$$U=\frac{G'}{2G}u+G\left[\left(\frac{b}{2}\right)x+1\right],$$

相似变元 $\qquad \eta=\dfrac{t+d}{x+R},\quad c=0,$

相似形式 $\qquad f(\eta)=\dfrac{(t+d)^{-1}}{u-\dfrac{1}{\eta}},$

$$\eta^2 f''+2\eta f'+ff'=0.$$

积分 $\qquad f=a_2\,\mathrm{th}\left[\dfrac{a_2}{2}(a_3-\eta^{-1})\right].$

解 $\quad u=a_2(t+d)^{-1}\mathrm{th}\left\{\dfrac{a_2}{2}\left[a_3-\dfrac{x+R}{t+d}\right]\right\}+\dfrac{x+R}{t+d}.$

(iii) 不对 E 作假设,

$$X=(t+d)^{-2}\left(x+\frac{1}{2}\right)+N(t+d)^{-2},\qquad d,\ N=\text{const}$$

$$U=-(t+d)^{-1}u+(t+d)^{-2}\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

相似变元和相似形式分别为

$$\eta=\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{N}{2}(t+d)^{-1}\right]\Big/(t+d),$$

$$f(\eta)=\left[u-\eta-\frac{1}{2}N(t+d)^{-2}\right](t+d).$$

解 贝塞尔函数.

对于布森内斯克方程(16.85),

$$u_{tt}+\frac{1}{2}(u^2)_{xx}+u_{xxxx}=0,$$

也可用非古典的无穷小变换得到相似变元、相似形式:

$$u(x,\ t)=f(z)-4\lambda^2t^2,\qquad z=x+\lambda t^2, \tag{18.19}$$

其中 λ 是常数, $f(z)$ 满足方程

$$\frac{d^3f}{dz^3}+f\frac{df}{dz}+2\lambda f=8\lambda^2z+A, \tag{18.20}$$

其中 A 是积分常数. 若在(18.20)中作变换

$$f(z)=\eta(\zeta)+2\lambda\zeta, \quad z=\zeta-\frac{A}{\delta\lambda^2},$$

则 $\eta(\zeta)$ 满足方程

$$\frac{d^3\eta}{d\zeta^3}+\eta\frac{d\eta}{d\zeta}+2\lambda\left(\zeta\frac{d\eta}{d\zeta}+2\eta\right)=0. \tag{18.21}$$

易知方程(18.21)的解能由变换为第二类潘勒卫(P. Painlevé)方程

$$\frac{d^2w}{dz^2}=2w^3+zw+\alpha \tag{18.22}$$

的解而得到．其中 α 是任意常数．容易验证布森内斯克方程归结为相似形式(18.19)的无穷小变换为

$$X(x,\ t,\ u)=2\lambda t, \quad T(x,\ t,\ u)=-1, \quad U(x,\ t,\ u)=\delta\lambda^2 t. \tag{18.23}$$

对于方程组，也可运用非古典的无穷小变换．例如对于边界层方程

$$uu_t+vv_x=u_{xx}, \quad u_t+v_x=0, \tag{18.24}$$

令

$$u'=u+\varepsilon U(x,\ t,\ u)+o(\varepsilon^2),$$
$$v'=v+\varepsilon V(x,\ t,\ u,\ v)+o(\varepsilon^2),$$

连同两个不变曲面条件

$$Xu_x+u_t=U, \quad Xv_x+v_t=V,$$

类似地求解．这里要注意的是 $U=U(x,\ t,\ u)$，而 $V=V(x,\ t,\ u,\ v)$．

§19 求相似解的一种直接方法

对于一个给定的偏微分方程，现介绍一种寻求如下形式

$$u(x,\ t)=U(x,\ t,\ w(z(x,\ t))) \tag{19.1}$$

的解的方法．将(19.1)代入给定的偏微分方程，对 v 及其导数给出一些条件，以决定 $w(z)$ 满足的常微分方程的解．以下以布森内

斯克方程(16.83)为例，对这种方法作简单介绍.

可以证明，对于布森内斯克方程

$$u_{tt}+\frac{1}{2}(u^2)_{xx}+u_{xxxx}=0, \tag{16.83}$$

(19.1)可取如下特殊的形式，

$$u(x,\ t)=\alpha(x,\ t)+\beta(x,\ t)w(z(x,\ t)), \tag{19.2}$$

其中 $\alpha(x,\ t)$、$\beta(x,\ t)$和 $z(x,\ t)$待定. 将(19.2) 代入(16.83). 可得

$$\begin{aligned}\beta z_x^4 w'''' &+ [6\beta z_x^2 z_{xx}+4\beta_x z_x^3]w'''+[\beta(3z_{xx}^2+4z_x z_{xxx})\\&+12\beta_x z_x z_{xx}+6\beta_{xx}z_x^2+\alpha\beta z_x^2+\beta z_t^2]w''\\&+[\beta z_{xxxx}+4\beta_x z_{xxx}+6\beta_x z_{xx}+4\beta_{xxx}z_x+2\alpha_x\beta z_x\\&+2\alpha\beta_x z_x+\alpha\beta z_{xx}+2\beta_t z_t+\beta z_{tt}]w'\\&+[\beta_{xxxx}+2\alpha_x\beta_x+\alpha\beta_{xx}+\alpha_{xx}\beta+\beta_{tt}]w\\&+\beta^2 z_x^2 ww''+\beta[4\beta_x z_x+\beta z_{xx}]ww'+\beta^2 z_x^2(w')^2\\&+[\beta_x^2+\beta\beta_{xx}]w^2+[\alpha_{tt}+\alpha\alpha_{xx}+\alpha_x^2+\alpha_{xxxx}]=0.\end{aligned} \tag{19.3}$$

附注 1 我们用 $w^{(4)}$ 的系数 βz_x^4 作为规范系数，这要求其他系数具有形式 $\beta z_x^4\Gamma(z)$，其中 Γ 是 z 的待定函数.

附注 2 为简单起见，$\Gamma(z)$ 通过微分、积分等运算后，仍记为 $\Gamma(z)$.

附注 3 不失一般性，对于 α、β、z 和 w，有三个自由度可利用.

(i) 若 $\alpha(x,\ t)$ 具有形式 $\alpha=\alpha_0(x,\ t)+\beta(x,\ t)\Omega(z)$，则能取 $\Omega\equiv0$. 事实上，代替 $w(z)$ 以 $w(z)-\Omega(z)$即得.

(ii) 若 $\beta(x,\ t)$ 具有形式 $\beta=\beta_0(x,\ t)\Omega(z)$，则能取 $\Omega\equiv1$. 事实上，作替换 $w(z)\to\dfrac{w(z)}{\Omega(z)}$即可.

(iii) 若 $\alpha(x,\ t)\Omega$ 方程 $\Omega(z)=z_0(x,\ t)$ 所确定，其中 $\Omega(z)$为可逆函数，即可取 $\Omega(z)=z$. 事实上，作替换 $z\to\Omega^{-1}(z)$即可.

我们现用直接方法确定布森内斯克方程的相似解. 由 ww'' 和 $(w')^2$ 的系数，得

$$\beta z_x^4 \Gamma(z) = \beta^2 z_x^2,$$

其中 $\Gamma(z)$是待定函数. 利用附注 3 的 (ii),取 $\Gamma(z)=1$,有

$$\beta = z_x^2. \tag{19.4}$$

由 w''' 的系数有

$$\beta z_x^4 \Gamma(z) = 4\beta_x z_x^3 + 6\beta z_x^2 z_{xx},$$

其中 $\Gamma(z)$是另一个待定函数. 由(19.4)可得

$$z_x \Gamma(z) + \frac{z_{xx}}{z_x} = 0.$$

对上式进行积分,得

$$\Gamma(z) + \ln z_x = \theta(t),$$

其中 $\theta(t)$是积分函数. 取指数,得

$$z_x \Gamma(z) = \theta(t).$$

再积分之,得

$$\Gamma(z) = x\theta(t) + \Sigma(t),$$

其中 $\Sigma(t)$是另一个积分函数. 由附注 3(iii),取 $\Gamma(z)=z$,有

$$z = x\theta(t) + \sigma(t), \tag{19.5}$$

其中函数 $\theta(t)$和 $\sigma(t)$待定. 从(19.4)和(19.5)得

$$\beta = \theta^2(t). \tag{19.6}$$

由 w'' 的系数,有

$$\beta z_x^4 \Gamma(z) = \beta(3z_{xx}^2 + 4z_x z_{xxx}) + 12\beta_x z_x z_{xx} + 6\beta_{xx} z_x^2 + \beta(\alpha z_x^2 + z_t^2),$$

其中 $\Gamma(z)$是待定函数. 由(19.5)、(19.6),上式可简化为

$$\theta^4 \Gamma(z) = \alpha\theta^2 + \left(x\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\sigma}{dt}\right)^2.$$

由附注 3(i),取 $\Gamma(z)=0$,可得

$$\alpha = -\frac{1}{\theta^2(t)}\left(x\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\sigma}{dt}\right)^2.$$

于是,方程(19.3)可简化为

$$\theta^6\{w'''' + Ww'' + (w')^2\} + \theta^2\left(x\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d^2\sigma}{dt^2}\right)w' + 2\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}w$$

$$-\frac{d^2w}{dt^2}\left\{\left[\frac{1}{\theta}\left(x\frac{d\theta}{dt}+\frac{d\sigma}{dt}\right)\right]^2\right\}$$

$$+\frac{6}{\theta^4}\left[\frac{d\theta}{dt}\left(x\frac{d\theta}{dt}+\frac{d\sigma}{dt}\right)\right]^2=0. \tag{19.7}$$

我们继续使(19.7)为 $w(z)$ 的常微分方程，对其他系数，有

$$\theta^6\gamma_1(z)=\theta^2\left(x\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{d^2\sigma}{dt^2}\right), \tag{19.8}$$

$$\theta^6\gamma_2(z)=2\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}, \tag{19.9}$$

$$\theta^6\gamma_3(z)=-\frac{d^2}{dt^2}\left\{\left[\frac{1}{\theta}\left(x\frac{d\theta}{dt}+\frac{d\sigma}{dt}\right)\right]^2\right\}$$

$$+\frac{6}{\theta^4}\left[\frac{d\theta}{dt}\left(x\frac{d\theta}{dt}+\frac{d\sigma}{dt}\right)\right]^2, \tag{19.10}$$

其中 $\gamma_1(z)$、$\gamma_2(z)$、$\gamma_3(z)$ 为待定函数. 因为 $z=x\theta(t)+\sigma(t)$，且(19.8)右端是 x 的线性函数，可推得 $\gamma_1(z)=Az+B$，其中 A 和 B 为常数，且

$$\theta^4[A(x\theta+\sigma)+B]=x\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{d^2\sigma}{dt^2}. \tag{19.11}$$

对比 x 的同次幂，可得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=A\theta^5, \tag{19.12}$$

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2}=\theta^4(A\sigma+B). \tag{19.13}$$

从方程(19.9)和(19.10)容易看到

$$\gamma_2(z)=2A, \qquad \gamma_3(z)=-2(Az+B)^2.$$

因此，布森内斯克方程(16.85)的一般相似形式和相似变元为

$$u(x,\ t)=\theta^2w(z)-\frac{1}{\theta^2(t)}\left(x\frac{d\theta}{dt}+\frac{d\sigma}{dt}\right)^2, \tag{19.14}$$

$$z(x,\ t)=x\theta(t)+\sigma(t), \tag{19.15}$$

其中 $\theta(t)$ 和 $\sigma(t)$ 满足方程(19.12)和(19.13)，$w(z)$ 满足方程

$$w''''+ww''+(w')^2+(Az+B)w'+2Aw=2(Az+B)^2. \tag{19.16}$$

方程(19.16)一般等价于第四类潘勒卫方程；但当 $A=0$ 时，它等价于第二类潘勒卫方程；当 $B=0$ 时，它等价于魏尔斯特拉斯(K. T. W. Weierstrass)椭圆函数的第一类潘勒卫方程.

下面分三种情况分别讨论相似解:

(i) $A=0$, $B=0$. 方程(19.12)、(19.13)的一般解为

$$\theta(t)=a_1t+a_0, \qquad \sigma(t)=b_1t+b_0,$$

布森内斯克方程的相似解为

$$u(x,\ t)=(a_1t+a_0)^2w(z)-\left(\frac{a_1x+b_1}{a_1t+a_0}\right)^2, \tag{19.17}$$

$$z=x(a_1t+a_0)+b_1t+b_0, \tag{19.18}$$

其中 $w(z)$ 满足方程

$$w''+\frac{1}{2}w^2=c_1z+c_0. \tag{19.19}$$

若取 $a_1=1$, $a_0=b_1=b_0=0$, 可得

$$u(x,\ t)=t^2w(z)-\frac{x^2}{t^2}, \qquad z=xt, \tag{19.20}$$

其中 $w(z)$ 满足方程(19.19). 这是布森内斯克方程对应于第一类潘勒卫方程新的相似形式. 相应的无穷小变换为

$$X=-x, \quad T=t, \quad U=2u+6\frac{x^2}{t^2}, \tag{19.21}$$

这不是布森内斯克方程古典无穷小变换的特殊情况.

(ii) $A=0$, $B\neq 0$. 方程(19.12)、(19.13)的一般解为

$$\theta(t)=a_1t+a_0,$$

$$\sigma(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{30}Ba_1^{-2}(a_1t+a_0)^5+b_1t+b_0, & \text{当 } a_1\neq 0 \text{ 时;}\\ \dfrac{1}{2}Ba_0^2t^2+b_1t+b_0, & \text{当 } a_1=0 \text{ 时.}\end{cases}$$

(a) $a_1=0$, 布森内斯克方程的相似解为

$$u(x,\ t)=a_0^2w(z)-\frac{(Ba_0^2t+b_1)^2}{a_0^2}, \tag{19.22}$$

$$z=a_0x+\frac{1}{2}Ba_0^2t^2+b_1t+b_0, \tag{19.23}$$

其中 $w(z)$满足方程

$$w''' + ww' + Bw = 2B^2 z + C_0. \qquad (19.24)$$

方程(19.24)等价于第二类潘勒卫方程. 当 $a_0=1$、$b_1=b_0=0$ 时，它归结为由非古典无穷小变换得到的相似解(18.19).

(b) $a_1 \neq 0$，布森内斯克方程的相似解为

$$u(x,\ t) = (a_1 t + a_0)^2 w(z) - \left(\frac{a_1^2 x + \frac{1}{5}(a_1 t + a_0)^5 + a_1 b_1}{a_1(a_1 t + a_0)}\right)^2, \qquad (19.25)$$

$$z = x(a_1 t + a_0) + \frac{B}{30 a_1^2}(a_1 t + a_0)^6 + b_1 t + b_0, \qquad (19.26)$$

其中 $w(z)$满足(19.24). 令 $a_1=1$、$a_0=b_1=b_0=0$，可得

$$u(x,\ t) = t^2 w(z) - \frac{(x+\lambda t^5)^2}{t^2}, \quad z = xt + \frac{1}{6}\lambda t^6, \qquad (19.27)$$

其中 $w(z)$满足(19.24)(取 $B=5\lambda$). 这是布森内斯克的另一个相似形式，它对应于第二类潘勒韦方程(18.22)，相对应的无穷小变换为

$$X = -(x+\lambda t^5), \quad T = t, \quad U = 2u + 2(x+\lambda t^5)(3x - 2\lambda t^5)t^2.$$

当 $\lambda=0$ 时，它等同于(19.20)、(19.21).

(iii) $A \neq 0$，此时令 $B=0$ 于方程(19.13)中，以 $\frac{d\theta}{dt}$乘(19.12)并进行积分，得

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{3} A\theta^6 + A_0, \qquad (19.28)$$

$$\theta(t) = C_0 (t+t_0)^{-\frac{1}{2}}, \qquad (19.29)$$

$C_0^4 = \frac{3}{4A}$，当 $A_0=0$ 时，将(19.29)代入(19.13)，得

$$\sigma(t) = C_1 (t+t_0)^{\frac{3}{2}} + C_2 (t+t_0)^{-\frac{1}{2}}.$$

令 $t_0=0$，$C_0=1$，$C_2=0$，可得相似解

$$u(x,\ t)=t^{-1}w(z)-\frac{1}{4}t^{-2}(x-3C_1t^2)^2, \qquad (19.30)$$

$$z=xt^{-\frac{1}{2}}+C_1t^{\frac{3}{2}},$$

$w(z)$满足方程

$$w''''+ww''+(w')^2+\frac{3}{4}zw'+\frac{3}{2}w=\frac{9}{8}z^2. \qquad (19.31)$$

若 $C_1\neq 0$, 这是一个新的相似变换，它对应于第四类潘勒韦方程。因若在(19.31) 中令 $w(z)=g(z)+\frac{z^2}{4}$, 则 $g(z)$满足方程(16.99)。

当 $A_0\neq 0$ 时，令

$$A_0=k^2, \qquad A=\frac{k^2+1}{3k^2},$$

其中 k 为待定常数，当 $k=\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3})$时，作变换

$$\theta^2(t)=(\eta^2(t)-A)^{-1},$$

则(19.28)化为

$$\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2=(1-\eta^2)(1-k^2\eta^2). \qquad (19.32)$$

方程(19.32)的解为雅可比椭圆函数 $S_\eta(t+t_0,\ k)$. 因此,

$$\theta(t)=\left(S_\eta^2(t+t_0,\ k)-\frac{k^2+1}{3k^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (19.33)$$

方程(19.13) 变为 $\frac{d^2\sigma}{dt^2}=\frac{k^2+1}{3k^2}\theta^4\sigma$, 它的解为

$$\sigma(t)=\left[c\left(\frac{2-k^2}{3k^2}t-\frac{1}{k^2}E(t+t_0;k)\right)+D\right]\theta(t), \quad (19.34)$$

其中 $E(t+t_0;k)$为第二类椭圆积分，有

$$E(t+t_0;k)=\int_0^{t+t_0}[1-k^2S_n^2(S;k)]dS,$$

其中 C 和 D 为任意常数. 取 $D=0$, 可得相似解.

$$u(x,\ t)=(S_n^2(t+t_0;k)-A)^{-1}w(z)-\left\{C[S_n^2(t+t_0;k)-A]\right.$$
$$-\left[x+C\left(\frac{2-k^2}{3k^2}t-k^{-2}E(t+t_0;k)\right)\right]\cdot S_n(t+t_0;k)$$

$$\cdot\sqrt{(1-S_n^2(t+t_0;k))(1-k^2S_n^2(t+t_0;k))}$$

$$\cdot(S_n^2(t+t_0;k)-A)^{-1}\Big\}^2,$$

$$z=\left\{x+C\left[\frac{2-k^2}{3k^2}t-k^{-2}E(t+t_0;k)\right]\right\}[S_n^2(t+t_0;k)-A]^{-2},\tag{19.35}$$

其中$k^2=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$，$A=\frac{k^2+1}{3k^2}=\frac{1}{2}\mp\frac{i}{2\sqrt{3}}$，$w(z)$满足方程

$$w^{(4)}+ww''+(w')^2+Azw'+2Aw=2A^2z^2.\tag{19.36}$$

这是另一个新的相似变换，它对应于第四类潘勒韦方程.

这种求相似解的直接方法，可用于一系列非线性演化方程. 以下再举两个例子，求作简单介绍.

我们考虑伯格斯方程

$$u_t+uu_x+u_{xx}=0.\tag{19.37}$$

令

$$u(x,\ t)=\alpha(x,\ t)+\beta(x,\ t)w(z(x,\ t)),\tag{19.38}$$

将(19.38)代入(19.37)，得

$$\begin{aligned}&\beta z_x^2w''+(2\beta_xz_x+\beta z_{xx}+\beta z_t+\alpha\beta z_x)w'\\&\quad+(\beta_{xx}+\beta_t+\alpha\beta_x+\alpha_x\beta)w+\beta^2z_xww'+\beta\beta_xw^2\\&\quad+\alpha_{xx}+\alpha_x+\alpha\alpha_x=0.\end{aligned}\tag{19.39}$$

用w''的系数为规范系数，为得到常微分方程，由ww'的系数得到

$$\beta z_x^2\Gamma(z)=\beta^2z_x,$$

其中$\Gamma(z)$为待定函数. 用附注3(i)，取

$$\beta=z_x.\tag{19.40}$$

由w^2的系数，有

$$\beta z_x^2\Gamma(z)=\beta\beta_x,$$

其中$\Gamma(z)$为待定函数. 由(19.40)，对上式积分两次，并利用附注3(iii)，有

$$z=x\theta(t)+\sigma(t),\qquad\beta=\theta(t),\tag{19.41}$$

其中$\theta(t)$、$\sigma(t)$为待定函数. 方程(19.39)可简化为

$$\theta^3(w''+ww')+\theta\left\{\left(x\frac{d\theta}{dt}+\frac{d\sigma}{dt}\right)+\alpha\theta\right\}w'$$
$$+\left\{\frac{d\theta}{dt}+\alpha_x\theta\right\}w+\alpha_{xx}+\alpha_t+\alpha\alpha_x=0. \quad (19.42)$$

如果

$$\alpha=-\frac{1}{\theta}\left(x\frac{d\theta}{dt}+\frac{d\sigma}{dt}\right), \quad (19.43)$$

$$\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}-2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=A^2\theta^6, \quad (19.44)$$

$$\theta\frac{d^2\sigma}{dt^2}-2\frac{d\theta}{dt}\frac{d\sigma}{dt}=\theta^5(A^2\sigma+2B), \quad (19.45)$$

其中 A 和 B 为任意常数，则可得到 $w(z)$ 的常微分方程。(19.44) 乘以 $2\theta^{-2}\frac{d\theta}{dt}$，积分，可得

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=A^2\theta^6+C^2\theta^4, \quad (19.46)$$

其中 C 为任意常数。

因此，伯格斯方程(19.37)的相似形式和相似变元为

$$u(x, t)=\theta(t)w(z)-\frac{1}{\theta}\left(x\frac{d\theta}{dt}+\frac{d\sigma}{dt}\right),$$
$$z=x\theta(t)+\sigma(t),$$

其中 $\theta(t)$ 和 $\sigma(t)$ 满足(19.45)和(19.46)。

现分四种情况讨论：

(i) $A=0,\ C=0$. 此时，(19.45)、(19.46)有解

$$\theta(t)=\theta_0, \qquad \sigma(t)=Bt^2+C_1t+C_2.$$

令 $\theta_0=1$，即得到相似解

$$\begin{aligned}&u(x, t)=w(z)-2Bt-C_1,\\&z=x+Bt^2+C_1t+C_2.\end{aligned} \quad (19.47)$$

(ii) $A\neq0,\ C=0$. 令 $A=-\frac{1}{2}$, $B=0$，则

$$\theta(t)=(t-t_0)^{-\frac{1}{2}}, \qquad \sigma(t)=C_3(t-t_0)^{\frac{1}{2}}+C_4(t-t_0)^{-\frac{1}{2}}.$$

令 $t_0=0,\ C_4=0$，可得

$$u(x, t)=t^{-\frac{1}{2}}w(z)+\frac{x}{2t}-\frac{1}{2}C_3,$$
$$z=t^{-\frac{1}{2}}x+C_3t^{\frac{1}{2}}. \tag{19.48}$$

(iii) $A=0$, $C\neq0$. 令 $C=-1$, 则

$$\theta(t)=(t-t_0)^{-1},\qquad \sigma(t)=B(t-t_0)^{-2}+C_5(t-t_0)^{-1}+C_6.$$

令 $t_0=0$, $C_5=0$, $C_6=0$, 则可得

$$u(x, t)=t^{-1}w(z)+\frac{x}{t}+\frac{2B}{t^2},\qquad z=\frac{x}{t}+\frac{B}{t^2}. \tag{19.49}$$

(iv) $A\neq0$, $C\neq0$. 令 $A^2=-1$, $B=0$, $C^2=1$, 则有

$$\theta(t)=(t^2+1)^{-\frac{1}{2}},\qquad \sigma(t)=(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}(C_7t+C_8).$$

令 $C_8=0$, 可得

$$u(x, t)=(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}w(z)+\frac{xt-C_7}{t^2+1},\qquad z=\frac{x+C_7t}{(t^2+1)^{\frac{1}{2}}}. \tag{19.50}$$

伯格斯方程的古典李群无穷小变换为

$$\begin{cases} X=\alpha x+\beta t+\gamma xt+\delta, \\ T=2\alpha T+\gamma t^2+k, \\ U=-\alpha u+\gamma(x-tu)+\beta, \end{cases} \tag{19.51}$$

其中 α、β、γ、δ 和 k 为任意常数.

我们再考察 KdV 方程

$$u_t+uu_x+u_{xxx}=0 \tag{19.52}$$

的相似解的直接解法. 设

$$u(x, t)=\alpha(x, t)+\beta(x, t)w(z(x, t)). \tag{19.53}$$

将(19.53)代入(19.52), 可得

$$\begin{aligned} &\beta z_x^3w'''+(3\beta_xz_x^2+3\beta z_xz_{xx})w''+(3\beta_{xx}z_x+3\beta_xz_{xx}+\beta z_{xxx} \\ &\quad+\beta z_t+\alpha\beta z_x)w'+(\beta_{xxx}+\beta_t+\alpha\beta_x+\alpha_x\beta)w \\ &\quad+\beta^2z_xww'+\beta\beta_xw^2+\alpha_{xxx}+\alpha_t+\alpha\alpha_x=0. \end{aligned} \tag{19.54}$$

用 w''' 的系数为规范系数, 为得到常微分方程, 由 ww' 的系数可得

$$\beta z_x^3\Gamma(z) = \beta^2 z_x,$$

其中 $\Gamma(z)$为待定函数. 由附注 3(i), 有

$$\beta = z_x^2. \tag{19.55}$$

由 w^2 的系数给出

$$\beta z_x^3\Gamma(z) = \beta\beta_x,$$

其中 $\Gamma(x)$为待定函数. 由(19.55), 上式积分二次, 由附注 3(iii), 有

$$z = x\theta(t) + \sigma(t), \qquad \beta = \theta^2(t), \tag{19.56}$$

其中 $\theta(t)$和 $\sigma(t)$为待定函数. 方程(19.54)可简化为

$$\theta^5(w''' + ww') + \theta^2\left\{\left(x\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\sigma}{dt}\right) + \alpha\theta\right\}w'$$

$$+\left\{2\theta\frac{d\theta}{dt} + \alpha_x\theta^2\right\}w + \alpha_{xxx} + \alpha_t + \alpha\alpha_x = 0. \tag{19.57}$$

如果

$$\alpha = -\frac{1}{\theta}\left(x\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\sigma}{dt}\right), \tag{19.58}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = A\theta^3, \tag{19.59}$$

$$\theta\frac{d^2\sigma}{dt^2} - 2\frac{d\theta}{dt}\frac{d\sigma}{dt} = 2\theta^6(A^2\sigma + B), \tag{19.60}$$

其中 B 为另一任意常数. KdV 方程(19.52)的相似解为

$$u(x, t) = \theta^2(t)w(z) - \frac{1}{\theta}\left(x\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\sigma}{dt}\right),$$

$$z = x\theta(t) + \sigma(t),$$

其中 $\theta(t)$和 $\sigma(t)$满足(19.59)、(19.60)。

现分两种情况讨论:

(i) $A \neq 0$. 令 $A = -\frac{1}{3}$、$B = 0$, 则有

$$\theta = (t - t_0)^{-\frac{1}{3}}, \qquad \sigma(t) = C_1(t - t_0)^{\frac{2}{3}} + C_2(t - t_0)^{-\frac{1}{3}},$$

令 $t_0 = 0$、$C_2 = 0$, 可得

$$u(x, t)=t^{-\frac{2}{3}}w(z)+\frac{x}{3t}-\frac{2}{3}C_1, \qquad z=\frac{x+C_1t}{t^{\frac{1}{3}}}. \tag{19.61}$$

(ii) $A=0$. 令 $\theta=1$, 有

$$\sigma(t)=Bt^2+C_3t+C_4,$$

令 $C_4=0$, 可得

$$u(x, t)=w(z)-2Bt-C_3, \qquad z=x+Bt^2+C_3t. \tag{19.62}$$

KdV 方程的古典李群无穷小变换为

$$X=\alpha x+\beta t+\gamma, \quad T=3\alpha t+\delta, \quad U=-2\alpha u+\beta, \tag{19.63}$$

其中 α、β、γ 和 δ 为任意常数.

§20 某些偏微分方程的潘勒韦性质

我们知道, 一个常微分方程(组)的解可看作具复变元(时间 t)的解析函数. 如果解的奇性依赖于初始条件, 则称此类奇点为"活动性"的(movable); 如果此种奇性来自方程的系数, 则称为"固定的"奇点. 如果一个常微分方程(组)的所有活动性奇点都是单值的, 即仅有简单极点, 则称此方程(组)具有潘勒韦性质. 这种常微分方程组的潘勒韦性质和偏微分方程有什么关系呢? 最近研究表明, 如果一个偏微分方程可用反散射方法求解, 则和盖尔芳德 (I. Gelfand)-莱维坦 (B. Levitan)-曼钦科 (V. A. Marchenko)方程相联系的利用相似变换得到的常微分方程组具有潘勒韦性质. 阿布洛维茨等人还猜测: 对于一个给定的偏微分方程, 用相似变换得到的所有常微分方程如果具有潘勒韦性质, 则这个偏微分方程将是"可积的". 这里有必要去定义和常微分方程对应的偏微分方程的潘勒韦性质, 以及建立它和"可积性"(Lax Pair, 贝克隆变换)的某些联系.

定义 如果一个偏微分方程的解关于活动的奇性流形是"单值"的, 则称它具有潘勒韦性质.

更详细地说，设有奇性流形

$$\phi(z_1, z_2, \cdots, z_n)=0, \tag{20.1}$$

其中 $\phi=\phi(z_1, z_2, \cdots, z_n)$，设 $u=u(z_1, z_2, \cdots, z_n)$为偏微分方程的一个解，则当 u 具有形式

$$u(z_1, z_2, \cdots, z_n)=\phi^\alpha\sum_{j=0}^{\infty}u_j\phi^j, \tag{20.2}$$

$u_j=u_j(z_1, z_2, \cdots, z_n)$是在流形(20.1)附近的关于$(z_1, z_2, \cdots, z_n)$的解析函数，$\alpha$ 为负整数，则我们称该偏微分方程**具有潘勒韦性质**.

以下我们以具体例子来说明，对于一个给定的偏微分方程，如何决定解的形式(20.2).

[例 1]　伯格斯方程

$$u_t+uu_x=\sigma u_{xx}. \tag{20.3}$$

设有展开式

$$u=\phi^\alpha\sum_{j=0}^{\infty}u_j\phi^j, \tag{20.4}$$

其中 $\phi=\phi(x, t)$，$u_j=u_j(x, t)$是在流形 $M=\{(x, t): \phi(x, t)=0\}$附近关于$(x,t)$的解析函数. 将(20.4)代入(20.3)，比较最低项，可得

$$\alpha=-1, \tag{20.5}$$

同时可得 u_j 的循环公式如下：

$$\begin{aligned}&u_{j-2,t}+(j-2)u_{j-1}\phi_t+\sum_{m=0}^{j}u_{j-m}[u_{m-1,x}+(m-1)\phi_x u_m]\\&=\sigma[u_{j-2,xx}+2(j-2)u_{j-1,x}\phi_x+(j-2)u_{j-1,x}\phi_x\\&\quad+(j-2)u_{j-1}\phi_{xx}+(j-1)(j-2)u_j\phi_x^2].\end{aligned} \tag{20.6}$$

整理一下含有 u_j 的项，可得

$$\phi_x^2(j-2)(j+1)u_j=F(u_{j-1}, \cdots, u_0, \phi_t, \phi_x, \phi_{xx}, \cdots),\quad j=0, 1, 2, \cdots \tag{20.7}$$

从(20.7)可看到，当 $J=-1$、2 时，u_j 不能决定. 这些 J 值称为循环关系的"共振". 在这些点上，u_j 是"任意的". $j=-1$ 对应于任意的(没有定义的)奇性流形($\phi=0$)，$j=2$ 引入任意函数 u_2 和"相

容条件”，该条件对于函数(ϕ, u_0, u_1)要求(20.6)右端恒等于0.

对于伯格斯方程(20.4)，由(20.6)可得

$$j=0,\quad u_0=-2\sigma\phi_x, \tag{20.8}$$

$$j=1,\quad \phi_t+u_1\phi_x=\sigma\phi_{xx}, \tag{20.9}$$

$$j=2,\quad \partial_x(\phi_t+u_1\phi_x-\sigma\phi_{xx})=0. \tag{20.10}$$

由(20.9)，相容条件(20.10)在 $j=2$ 上是恒等地满足的，因此伯格斯方程具有潘勒韦性质．进一步，若引入任意函数

$$u_2=0, \tag{20.11}$$

且要求

$$u_{1t}+u_1u_{1x}=\sigma u_{1xx}, \tag{20.12}$$

则

$$u_j=0,\qquad j\geqslant 2. \tag{20.13}$$

此时，我们可得到伯格斯方程的如下贝克隆变换

$$u=-2\sigma\frac{\phi_x}{\phi}+u_1, \tag{20.14}$$

其中(u, u_1)满足伯格斯方程，且

$$\phi_t+u_1\phi_x=\sigma\phi_{xx}. \tag{20.15}$$

当 $u_1=0$ 时，可得到 Cole-霍普夫变换．当 $u_1=\phi$ 时有

$$u=-2\sigma\frac{\phi_x}{\phi}+\phi, \tag{20.16}$$

其中

$$\phi_t+\phi\phi_x=\sigma\phi_{xx}. \tag{20.17}$$

[例2]　KdV 方程

$$u_t+uu_x+\sigma u_{xxx}=0, \tag{20.18}$$

$$u=\phi^{-2}\sum_{j=0}^{\infty}u_j\phi^j. \tag{20.19}$$

容易发现，当 $j=-1, 4, 6$ 时发生“共振”．当 $j=4, 6$ 时相容条件恒等地满足．因此，KdV 方程具有潘勒韦性质．有

$$j=0,\quad u_0=-12\sigma\phi_x^2, \tag{20.20}$$

$$j=1,\quad u_1=12\sigma\phi_{xx}, \tag{20.21}$$

$$j=2,\quad \phi_x\phi_t+\phi_x^2u_2+4\sigma\phi_x\phi_{xxx}-3\sigma\phi_{xx}^2=0, \tag{20.22}$$

$$j=3,\quad \phi_{xt}+\phi_{xx}u_2-\phi_x^2u_3+\sigma\phi_{xxxx}=0, \tag{20.23}$$

$j=4$， 相容条件

$$\frac{\partial}{\partial x}(\phi_{xt}+\phi_{xx}u_2-\phi_x^2u_3+\sigma\phi_{xxxx})=0. \tag{20.24}$$

由(20.23)可知相容条件(20.24)恒等地满足，当 $j=6$，相容条件也是满足的．令"共振"函数

$$u_4=u_6=0, \tag{20.25}$$

进一步要求

$$u_3=0. \tag{20.26}$$

容易证明：如果

$$u_{2t}+u_2u_{2x}+\sigma u_{2xxx}=0, \tag{20.27}$$

则有

$$u_j=0,\quad j\geqslant 3. \tag{20.28}$$

综合之，有

$$\left.\begin{aligned}
&\text{(i)}\ u_j=0,\ j\geqslant 3,\\
&\text{(ii)}\ u_0=-12\sigma\phi_x^2,\ u_1=12\sigma\phi_{xx},\\
&\text{(iii)}\ \text{(a)}\ \phi_x\phi_t+\phi_x^2u_2+4\sigma\phi_x\phi_{xxx}-3\sigma\phi_{xx}^2=0,\\
&\qquad\ \ \text{(b)}\ \phi_{xt}+\phi_{xx}u_2+\sigma\phi_{xxxx}=0,\\
&\text{(iv)}\ u_{2t}+u_2u_{2x}+\sigma u_{2xxx}=0,\\
&\text{(v)}\ u=-12\sigma\frac{\phi_x^2}{\phi^2}+12\sigma\frac{\phi_{xx}}{\phi}+u_2,\\
&\text{或}\qquad u=12\sigma\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\phi+u_2,
\end{aligned}\right\} \tag{20.29}$$

其中 $$u_t+uu_x+6u_{xxx}=0.$$

从(20.29)可得 KdV 方程的贝克隆变换．事实上，从(20.29)的(iiia)解出 ϕ_t，再对 x 微商，利用(20.29)的(iiib)，令

$$\phi_x=v^2, \tag{20.30}$$

可得

$$\left.\begin{aligned}
&\text{(i)}\ 6\sigma v_{xx}+u_2x=\lambda v,\\
&\text{(ii)}\ 2v_t+u_2v_x+\lambda v_x+2\sigma v_{xxx}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{20.31}$$

于是，KdV 方程的贝克隆变换为

$$u=12\sigma\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\phi+u_2,$$

其中

$$\phi_x=v^2,$$

$$6\sigma v_{xx}+u_2v=\lambda v,$$

$$2v_t+u_2v_x+\lambda v_x+2\sigma v_{xxx}=0.$$

u_2 和 u 分别为 KdV 方程(20.18)的解，即有

$$u_{2t}+u_2u_{2x}+\sigma u_{2xxx}=0,$$

$$u_t+uu_x+\sigma u_{xxx}=0.$$

在(20.29)中取 $\sigma=1$，从(20.29)的(a)、(b)中消去 u_2，可得

$$\varphi_t/\varphi_x+\{\varphi;x\}=\lambda, \tag{20.32}$$

其中

$$\{\varphi;x\}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi_x}\right)-\frac{1}{2}\frac{\varphi_{xx}^2}{\varphi_x^2} \tag{20.33}$$

是 φ 的许瓦兹(H. A. Schwarz)导数，(20.32)在 Möbius 群

$$\varphi=\frac{a\psi+b}{c\psi+d} \tag{20.34}$$

下是不变的．令

$$\varphi=v_1/v_2, \tag{20.35}$$

其中$(v_1,\ v_2)$满足

$$v_{xx}=av,\qquad v_t=bv_x+cv, \tag{20.36}$$

可得

$$a=-\frac{1}{6}(u_2+\lambda),\qquad b=-\frac{u_2}{3}+\frac{2}{3}\lambda,\qquad c=\frac{u_x}{6}. \tag{20.37}$$

[例 3]　布森内斯克方程

$$u_{tt}+2uu_{xx}+2u_x^2+\frac{1}{3}u_{xxxx}=0. \tag{20.38}$$

类似地，可得

$$u=\phi^{-2}\sum_{j=0}^{\infty}u_j\phi^j. \tag{20.39}$$

“共振点”为

$$j=-1,\ 4,\ 5,\ 6. \tag{20.40}$$

从循环关系可得

$$j=0,\quad u_0=-2\phi_x^2, \tag{20.41}$$

$$j=1,\quad u_1=2\phi_{xx}, \tag{20.42}$$

$$j=2,\quad \phi_t^2-\phi_{xx}^2+\frac{4}{3}\phi_x\phi_{xxx}+2u_2\phi_x^2=0, \tag{20.43}$$

$$j=3,\quad \phi_{tt}+\frac{1}{3}\phi_{xxxx}+2\phi_{xx}u_2-2\phi_x^2u_3=0, \tag{20.44}$$

$j=4$ (共振)，若满足相容条件

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\phi_t^2-\phi_{xx}^2+\frac{4}{3}\phi_x\phi_{xxx}+2u_2\phi_x^2\right)=0, \tag{20.45}$$

则 u_4 是任意的. 从(20.43)可知，(20.45)是满足的. 可以验证，$j=6$(共振)也是满足更为复杂的相容条件的. 令

$$u_j=0, \qquad (j=3,\ 4,\ 5,\ 6)$$

则可验证

$$u_j=0, \qquad (j\geqslant 3) \tag{20.46}$$

由此可得贝克隆变换为

$$u=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\varphi+u_2, \tag{20.47}$$

其中$(u,\ u_2)$满足(20.38)，且

$$\phi_t^2-\phi_{xx}^2+\frac{4}{3}\phi_x\phi_{xxx}+2u_2\phi_x^2=0, \tag{20.48}$$

$$\phi_{tt}+\frac{1}{3}\phi_{xxxx}+2\phi_{xx}u_2=0. \tag{20.49}$$

[例 4]　非线性薛定谔方程

$$iv_t+v_{xx}+2v|v|^2=0. \tag{20.50}$$

该方程可写成方程组

$$\begin{cases} iU_t+U_{xx}+2U^2V=0, \\ -iV_t+V_{xx}+2UV^2=0, \end{cases} \tag{20.51}$$

其中 $V=U^*$. 方程组(20.51)具有潘勒韦性质，具有展开式

$$U=\varphi^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}U_j\varphi^j,\qquad V=\varphi^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}V_j\varphi^j,\tag{20.52}$$

"共振点"为

$$j=-1,\ 0,\ 3,\ 4,\tag{20.53}$$

贝克隆变换为

$$U=U_0/\varphi+U_1,\qquad V=V_0/\varphi+V_1,\tag{20.54}$$

其中(φ, U_0, V_0, U_1, V_1)由以下方程组决定:

$$\begin{cases}U_0V_0=-\varphi_x^2,\\ 4\varphi_x^2U_1-2U_0^2V_1=-i\varphi_tv_0-2\varphi_xU_{0x}-\varphi_{xx}v_0,\\ -2V_0^2U_1+4\varphi_x^2V_1-i\varphi_tV_0-2\varphi_xV_{0x}-\varphi_{xx}V_0,\\ iU_{0t}+U_{0xx}+2V_0U_1^2+4U_0U_1V_1=0,\\ -iV_{0t}+V_{0xx}+2U_0V_1^2+4V_0V_1U_1=0,\\ iU_{1t}+U_{1xx}+2U_1^2V_1=0,\\ -iV_{1t}+V_{1xx}+2U_1V_1^2=0.\end{cases}\tag{20.55}$$

从(20.55)有

$$\begin{cases}U_0V_0=-\varphi_x^2,\\ U_0V_1+V_0U_1=\varphi_{xx},\\ U_0V_1-V_0U_1=-i\varphi_t+(V_0U_{0x}-U_0V_{0x})/\varphi_x,\\ 2i(\varphi_t/\varphi_x)=(V_0U_{0x}-U_0V_{0x})/\varphi_x^2+\lambda,\\ U_1V_1=-\dfrac{1}{4}\left\{\left(\dfrac{\varphi_t}{\varphi_x}\right)^2+\left(\dfrac{\varphi_{xx}}{\varphi_x}\right)^2+2i\lambda\dfrac{\varphi_t}{\varphi_x}-\lambda^2\right\}\end{cases}\tag{20.56}$$

和

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varphi_t}{\varphi_x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\{\varphi;x\}-\frac{3}{2}\left(\frac{\varphi_t}{\varphi_x}\right)^2-2i\lambda\frac{\varphi_t}{\varphi_x}+\frac{\lambda^2}{2}\right\}=0,\tag{20.57}$$

其中 λ 为一积分常数.

[例 5] 卡多姆采夫(B. B. Kadomstev)-佩特维亚什维利(V. I. Petriashvili)方程(KP 方程)

$$u_{tt}+u_x^2+uu_{xx}+6u_{xxxx}+u_{yy}=0.\tag{20.58}$$

该方程具有展开式

$$u=\phi^{-2}\sum_{j=0}^{\infty}u_j\varphi^j, \tag{20.59}$$

"共振点"为

$$j=-1,\ 4,\ 5,\ 6. \tag{20.60}$$

从循环公式，可得

$$j=0,\quad u_0=-12\sigma\varphi_x^2, \tag{20.61}$$

$$j=1,\quad u_1=12\sigma\varphi_{xx}, \tag{20.62}$$

$$j=2,\quad \phi_t\phi_x+4\sigma\varphi_x\varphi_{xxx}-3\sigma\phi_{xx}^2+\varphi_y^2+u_2\varphi_x^2=0, \tag{20.63}$$

$$j=3,\quad \phi_{xt}+\sigma\varphi_{xxxx}+\varphi_{yy}+\varphi_{xx}u_2-\varphi_x^2u_3=0, \tag{20.64}$$

$j=4$ (共振)，由(20.63)可知相容条件

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\phi_t\varphi_x+4\sigma\varphi_x\varphi_{xxx}-3\sigma\varphi_{xx}^2+\varphi_y^2+u_2\varphi_x^2)=0. \tag{20.65}$$

满足，因此 u_4 是任意的.

$j=5$ (共振)，由(20.64)可知相容条件

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\phi_{xt}+\sigma\phi_{xxxx}+\varphi_{yy}+\varphi_{xx}u_2-\varphi_x^2u_3)=0 \tag{20.66}$$

满足. 因而，u_5 是任意的. 同理 $j=6$ (共振)可以验证更为复杂的相容条件满足. 因此，

$$u_j=0. \qquad (j\geqslant 4)$$

于是，KP 方程(20.58)具有潘勒韦性质，且具有贝克隆变换

$$u=12\sigma\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\varphi+u_2, \tag{20.67}$$

其中(u,u_2)满足 KP 方程(20.58).

第 5 章

无穷维动力系统

众所周知，有限维动力系统的研究至少已有三十多年的历史．至今，已取得了许多重要的成果．但是，动力系统的问题远远不限于有限维的情形．流体力学中的湍流问题，就是一个无穷维动力系统的问题．目前，把贝纳尔对流的牛顿-布森内斯克流体力学方程组的未知函数作傅里叶展开，在保留三个运动模式的近似下，得到了著名的洛伦兹模型．因此，它只是描述贝纳尔对流的牛顿-布森内斯克方程的一个近似．最近，物理上已发现一大批具有孤立子的非线性演化方程（它们属于可积系统），例如，KdV 方程、非线性薛定谔方程、萨哈罗夫方程、正弦-戈登方程等等，在一定的耗散作用下从孤立子演化为混沌现象（它们属于不可积系统）．这些都说明对无穷维动力系统的研究已势在必行．这是有限维动力系统的深入和发展．

无穷维动力系统具有某些新的重要特征：首先是存在空间上的混沌现象，即在某个区域产生混沌、湍流，而在另一些区域则不出现．例如下面将要举出的绕流问题，就是一个典型的例子．而有限维动力系统仅研究时间上的混沌现象．其次，在空间的某个部分可能产生奇性集．例如在三维空间的流体运动中，速度 $\boldsymbol{u}$ 的旋度 rot $\boldsymbol{u}$ 可能在区域 Ω 的某个部分变成无穷大．勒雷（J. Leray）在 1932 年就预言此时产生湍流．因此，对无穷维动力系统的研究，将为湍流的研究开辟一条新的道路．这也是当今许多物理、力学研究工作者热衷于此的原因之一．从数学上来看，在原来有限维动力系统斯梅尔（S. Smale）、莫泽（J. Moser）、梅尔尼科夫（Melnikov）的工作基础上，曼德尔勃罗特（B. Mandelbrot）在 1977 年提出了分形集的概念，莱迪察斯科娅（O. A. Ladyzhenskoya）、维

西克(M. I. Vishik)、富瓦斯(C. Foias)、尼科拉延科(B. Nicolaenko)、特马姆(R. Teman)、赫尔(J. K. Hale)、塞尔(G. R. Sell)等人已对某些具有耗散效应的非线性演化方程的整体吸引子、惯性流形的存在性,它们的豪斯多夫维数,Fractal 维数的上下界估计,吸引子的动态结构,近似惯性流形,非线性伽辽金方法,惯性集等问题进行了多方面的研究,得到了一系列重要的结果. 例如,黑本(Y. Kuramoto)-西瓦申斯基(G. Sirashinsky)方程的整体吸引子、惯性流形、惯性集的存在性及其维数估计、具耗散的非线性薛定谔方程、萨哈罗夫方程组(一维)、具耗散的非线性波动方程、贝纳尔流、Brussel 振子、具阻尼的 KdV 方程等方程的整体吸引子及其维数估计. 同时,也举出了一些不存在整体吸引子和惯性流形的例子.

数学上,现已建立了无穷维动力系统的重要数学理论,提供了理论研究和数值计算方法. 其中,从偏微分方程的定性研究来看,最关键的是要建立对定解问题的解对时间 t 大范围的一致先验估计. 无穷维动力系统、混沌的问题,实际上是研究 $t\to\infty$ 时解的性态的问题. 因此,对它的研究也为非线性偏微分方程的研究提供了新的课题. 由于大型计算机的迅速发展,可以期望在理论和数值计算的结合下,对于混沌、湍流的研究必将进入一个新的阶段.

当然,无穷维动力系统是相当复杂的. 目前,我们对它的了解还很粗浅. 例如整体吸引子、惯性流形的拓扑结构、保守系统的混沌的研究等等都存在许多重大的理论和实际问题. 这些都有待于今后进一步研究. 本章着重介绍无穷维动力系统的基本概念、估计和方法以及最新的一些进展.

§ 21 无穷维动力系统

我们考虑微分方程

$$\frac{du(t)}{dt}=F(u(t)) \tag{21.1}$$

具初始条件

$$u(0)=u_0 \tag{21.2}$$

的解，并关心当 $t\to\infty$ 时 $u(t)$ 的渐近行为．其中，未知函数 $u=u(t)$ 属于线性空间 H（通称为相空间）．$F(u)$ 把 H 映射到自身．有两种情形需要考虑：

（i）有限维情形，当 $u=u(t)\in H=\mathbb{R}^N$．

（ii）无限维情形，当 $u=u(t)\in H=$ 某希尔伯特空间．

虽然这两种情形有许多共同点，但它们依然存在某些重大的差别．当然，我们可以把有限维动力系统看成无限维动力系统若干有限模态的近似．

在一般情况下，在(21.1)中 F 依赖于某个参数 λ，即

$$F(u)=F_\lambda(u).$$

当 $t\to\infty$ 时，物理现象和状态是随着参数 λ 的变化而变化的．我们作如下的描述：

（i）当 λ 小时，如 $\lambda<\lambda_1$，存在唯一的定常解，即有方程

$$F_\lambda(u)=0 \tag{21.3}$$

的唯一解 $u=u_1^s$．这个定常解是稳定的，它吸引所有轨线，即有

$$u(t)\to u_1^s, \qquad (t\to\infty)$$

其中 $u(t)$ 是(21.1)、(21.2)的任意解，u_0 是任意的．

（ii）对于 λ 更大的值，如 $\lambda_1<\lambda<\lambda_2$，将有(21.3)的其他解，即出现定常解 u_2^s，u_3^s，……此时 u_1^s 丧失稳定性，定常解在 $\lambda=\lambda_1$ 上发生分岔，$u(t)$将收敛于定常解之一，如

$$u(t)\to u_2^s, \qquad (t\to\infty)$$

此时解的极限依赖于 u_0，每个定常解具有自己的吸引盆，并吸引(21.1)、(21.3)的所有解．

（iii）当 λ 继续增大时，如 $\lambda_2<\lambda<\lambda_3$，则产生霍普夫分岔．此时，流不再是定常的了．我们有

$$u(t)\to\varphi(t), \qquad (t\to\infty)$$

其中 φ 为(21.1)的时间周期解，具周期 T，即有

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=F(\varphi(t)), \qquad (0\leqslant t\leqslant T) \quad (21.4)$$

$$\varphi(t+T)=\varphi(t). \qquad (t\geqslant 0) \quad (21.5)$$

此时可能发展为由费根鲍姆(M. J. Feigenbaum)发展的倍周期分岔或拟周期解(参见如下的段落 iv).

(iv) 对于大的 λ，如 $\lambda_3<\lambda<\lambda_4$，将产生不变环. 即当 $t\to\infty$ 时，

$$u(t)\to\varphi(t), \qquad (t\to\infty) \quad (21.6)$$

其中 φ 是方程(21.4)具形式

$$\varphi(t)=g(\omega_1 t, \cdots, \omega_n t) \quad (21.7)$$

的拟周期解. 于此 g 对每个变元具有 T_i 为周期，频率 $\omega_i=\frac{1}{T_i}$ 为相互无关的有理数($i=1, 2, \cdots, n$). 此时，流看起来很像混沌，但傅里叶分析表明，它的行为由具有离散频率 ω_i 的模所决定，并不是真正的混沌状态.

(v) 最后，$\lambda>\lambda_4$. 此时进入混沌状态，$u(t)$对一切时间完全随机. 傅里叶分析表明，有一个连续谱带. 此时，

$$u(t)\to X, \qquad (t\to\infty) \quad (21.8)$$

即有：(图 21-1)

$$\operatorname{dist}(u(t), X)\to 0, \qquad (t\to\infty)$$

其中 X 为相空间 H 的不变子集，它对于(21.2)、(21.2)形成的半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是不变的，即有

图 21-1

$$S(t)X\subset X. \qquad (t\geqslant 0) \quad (21.9)$$

X 可能是一个分形集，如同康托集或在一区间上康托集的乘积. 当 t 很大时，$u(t)$在 X 上或在 X 的附近游荡着.

下面举两个物理中的实际例子，来说明无穷维动力系统所发生的现象.

［例1］ 贝纳尔问题

设有长方形的密封容器，其中充满流体．从底部($y=0$)不断加温(图21-2)，随着和容器顶部($y=\beta$)温差的加大，我们观察产生对流后的物理图象．这一问题可归结为如下的牛顿-布森内斯克方程的定解问题(二维)：

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}-\nu\,\Delta\boldsymbol{u}+\nabla p=\boldsymbol{e}_2(T-T_1), \tag{21.10}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)T-k\Delta T=0, \tag{21.11}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0, \tag{21.12}$$

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0},\quad 当\ x=0,\ x=\alpha\ 时, \tag{21.13}$$

$$T=T_0,\ y=0;\quad T=T_1,\ y=\beta, \tag{21.14}$$

其中$\boldsymbol{u}$、p、T分别表示流体的速度、压力、温度，ν为粘性系数，k为热传导系数，$\boldsymbol{e}_2$表示平行于y轴的单位向量，$T_0>T_1$，α、$\beta>0$．实验和数值模拟表明，当$\lambda=\dfrac{T_0-T_1}{T_0}<\lambda_1$时，流体保持静止，平衡解$u_1^0$对应于纯热传导问题的依$y$方向温度为线性分布的解；当$\lambda_1<\lambda<\lambda_2$时，纯热传导的解发生不稳定，流体开始运动，直到另外定态解u_2^0对应于古典的圈的形成，见图21-3；当$\lambda_2<\lambda<\lambda_3$时，产生时间周期解，对应于圈的边界开始周期振荡；当$\lambda_3<\lambda<\lambda_4$时，此时圈的边界已作无规则振荡，谱分析表明，倍周期分岔已经发生；最后，当$\lambda>\lambda_4$时，圈已经消失，整个流处于混乱状态．

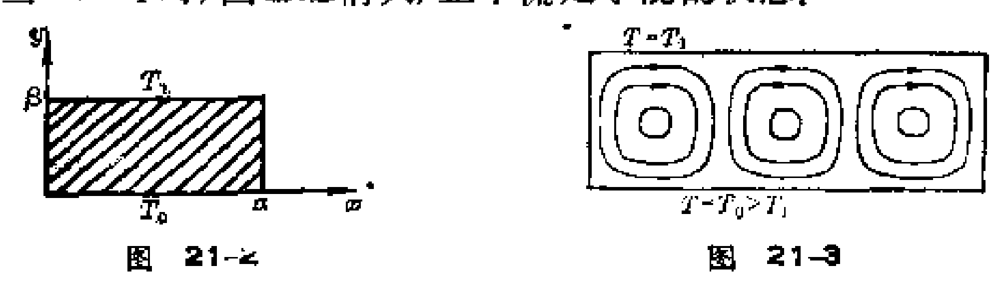


图 21-2　　　　图 21-3

［例2］ 通过一个球形物体的绕流

设在无穷远处具有速度为U_∞的不可压缩流体绕过一个球形物体．可取参数λ为雷诺(Reynolds)数

$$\lambda = R_e = \frac{\nu |U_\infty|}{R},$$

其中 ν 为动力粘性，R 为球的半径．实际实验过程，可将 ν 和 R 保持不变，增加 λ 由增加在无穷远处的速度 $U_\infty = |U_\infty|$ 来得到．在实验的第一阶段，它对应于完全的层流状态(小雷诺数，图 21-4 (i))．在第二阶段，产生定常的 von Kármán 涡旋(图 21-4(ii))．在第三阶段，当发生霍普夫分岔后，再不出现定常流，形成时间周期流．此时，卡曼(T. von Kármán)涡旋向右运动并消失，而在左边作类似的时间周期运动(图 21-4(iii))．在第四阶段，当 U_∞ 很大时，卡曼涡旋消失，在右方作无规的拟周期运动．最后，在第五阶段，对于大的 U_∞，在球后处于完全的湍流状态(图 21-4(iv))．此时，整个流对一切时间都是不定常的，即出现数学上定义的吸引子．

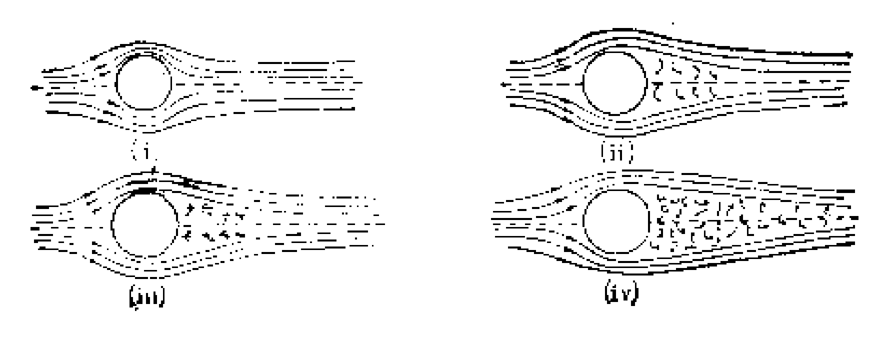


图 21-4

§22 无穷维动力系统的某些问题

本节继续介绍无穷维动力系统的一些问题．一般来说，它们是具有耗散的非线性演化方程．当耗散为 0 时，它们是可积系统或近可积系统，具有孤立子解．数值模拟或理论分析表明，这些物理问题最后将进入混沌状态．

1．具阻尼的和非均匀介质的萨哈罗夫方程组

一维萨哈罗夫方程组

$$i\varepsilon_t + \varepsilon_{xx} - n\varepsilon = 0, \tag{22.1}$$

$$n_{tt}-n_{xx}=|\varepsilon|^2_{xx},\qquad(22.2)$$

其中 $\varepsilon(x, t)$是电场强度(复值函数)，$n(x, t)$是密度扰动(实值函数). 1972 年萨哈罗夫[135]首先提出这个方程组，并找到了它的孤立子解，成功地解释了激光打靶时在临界面附近产生的密度坑现象. 这方程组也出现于分子结构 DNA 模型上. 它能从简化的双流体方程作某些线性化处理而得到. 1982 年 G. D. Doolen[136]等对于一维具阻尼和驱动源的萨哈罗夫方程(傅里叶变换后)

$$i[\partial_t+\nu_e(k)-k^2]E_k(t)=\sum_{k'}n_{k'}E_{k-k'}+S_k(t),\qquad(22.3)$$

$$[\partial_t^2+2\nu_i(t)+k^2]n_k(t)=-k^2\sum_{k'}E^*_{-k'}E_{k-k'}(t)\qquad(22.4)$$

进行了数值计算，其中 ν_e、ν_i 分别表示电子、离子的阻尼率，$S_k(t)$ 为驱动源. 对于具有周期边界条件的问题(22.3)、(22.4)，用 64～1024 个模进行计算. 驱动源分三种情况:

（i）相干源

$$S_k(t)=\begin{cases}\nu_e\omega_0^{\frac{1}{2}}, & \text{当 } |k|<k_{dr} \text{ 时;}\\ 0, & \text{当 } |k|>k_{dr} \text{ 时,}\end{cases}$$

其中 ν_e、ω_0、k_{dr} 均为确定常数.

（ii）相干束流

$$S_k(t)=\begin{cases}\nu_e(k)=-\nu_{dr}, & \text{当 } |k|\leqslant k_{dr} \text{ 时;}\\ \nu_e(k)=\nu_e=\text{常数}>0, & \text{当 } |k|>k_{dr} \text{ 时,}\end{cases}$$

其中 ν_{dr} 为常数.

（iii）噪声源

$$S_k(t)=\begin{cases}\nu_e\omega_0^{\frac{1}{2}}\xi_k(t), & \text{当 } |k|\leqslant k_{dr} \text{ 时;}\\ 0, & \text{当 } |k|>k_{dr} \text{ 时,}\end{cases}$$

其中 $\xi_k(t)$为某已知函数.

经过大量计算，对于 5 个模，

$$\nu_{dr}=-0.025,\quad \nu_e=0.05,\quad \nu_i=0.005k,\quad k_{dr}=0.2,$$

数值结果表明，由孤立子和混沌共存的局面逐步发展成为完全的

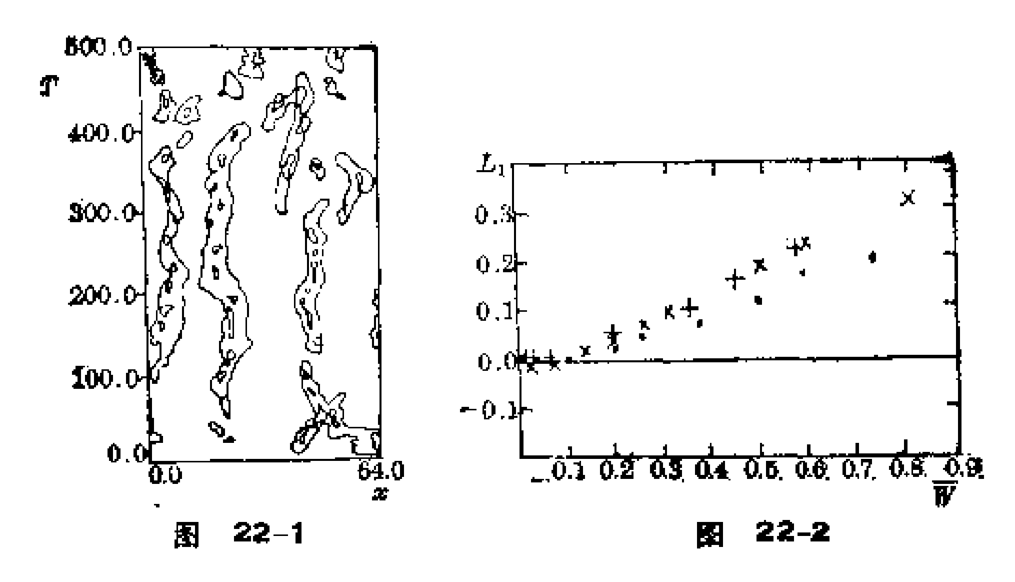


图 22-1　　　　图 22-2

混沌状态. 图 22-1 表示在 x, t 平面上相等 $|E(x, t)|^2$ 的围道, 5 个模, $k_{dr}=0.2$, 相干束源, $\nu_d=-0.025$, $\nu_e=0.05$, $\nu_i=0.005$, $L=64$, $W=0.13$. 图 22-2 表示能量 $\overline{W}$ 和李雅普诺夫指数 L_1 的关系, 图中"×"表示噪声源, "+"表示束源($k_{dr}=0.27$), "∘"表示相干源.

1989 年鲁宾孙(P. A. Robinson)、牛曼(D. L. Newman)[137] 对于具阻尼的非均匀介质的二维萨哈罗夫方程组

$$\nabla(i\partial_t+\nabla^2+i\hat{r})\boldsymbol{\varepsilon}=\nabla(n\boldsymbol{\varepsilon})+S_k(t), \tag{22.5}$$

$$(\partial_t^2+2C_s\hat{\nu}\partial_t-C_s^2\nabla^2)n=\nabla^2|\boldsymbol{\varepsilon}|^2 \tag{22.6}$$

在加入不同的外源下进行数值计算, 发现了混沌现象. 其中 $\hat{r}$ 为朗缪尔(I. Langmuir) 阻尼算子, $\hat{\nu}$ 为离子声阻尼算子, C_s 为离子声速, 注入的外源项为(在傅里叶空间上)

$$S_k(t)=\begin{cases}r_bE_b, & \text{当 } k=k_b \text{ 时;}\\ 0, & \text{当 } k\neq k_b \text{ 时,}\end{cases}$$

其中 E_b 为某确定的物理常数, k_b、r_b 分别取如下数值:

(i) $k_b=0$, $r_b=-1.7\times10^{-4}W_p$,

(ii) $k_b=0.066k_b x$, $r_b=-1.7\times10^{-4}W_p$,

(iii) $k_b=0.225k_b x$, $r_b=-1.7\times10^{-4}W_p$,

这里 k_b、W_p 均为物理常数. 计算结果如图 22-3、22-4、22-5 所示.

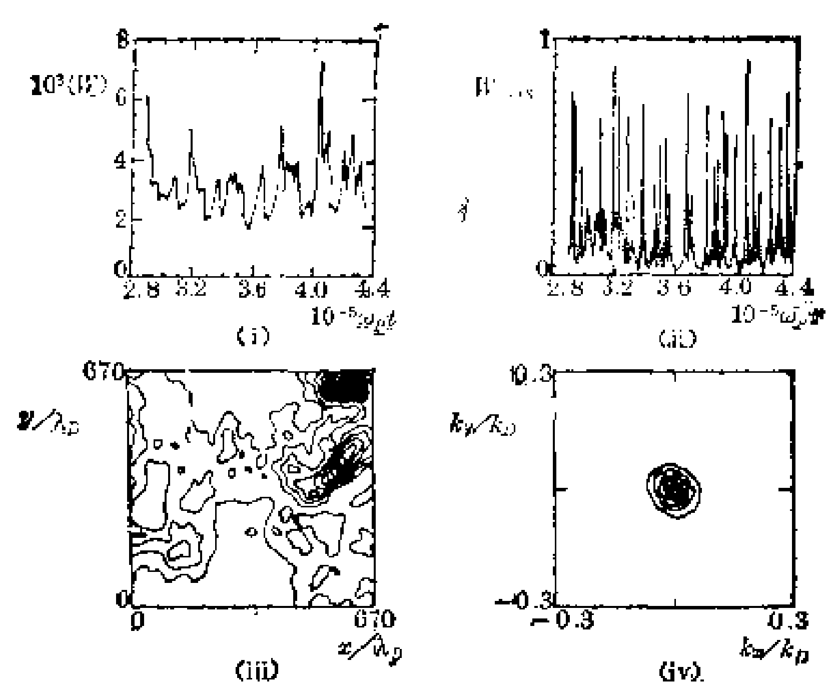


图 22-3 强湍流的朗缪尔波注入单色波源

$k_b=0$; $\gamma_b=-1.7\times10^{-4}W_p$

(i) $\langle W\rangle$随时间 t 的发展 (ii) W_{max} 随时间 t 的发展

(iii) $|E|$ 的实空间围道,表明波包的强烈坍缩.

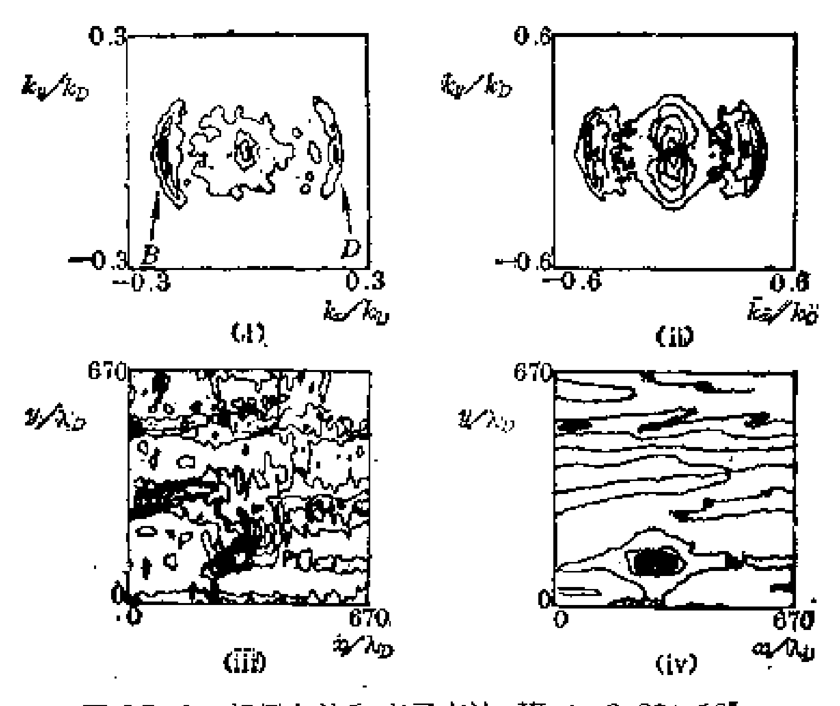


图 22-4 朗缪尔波和离子声波, $W_p t=2.23\times10^5$.

(i) $\log[W(k)/W(k)_{max}]$; (ii) $\log[|n_k|/|n_k|_{max}]$; (iii) W/W_{max}, $W_{max}=0.044$ (iv) $-n/(-n)_{max}$, $(-n)_{max}=0.026N$.

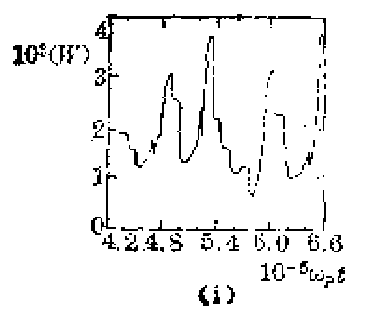
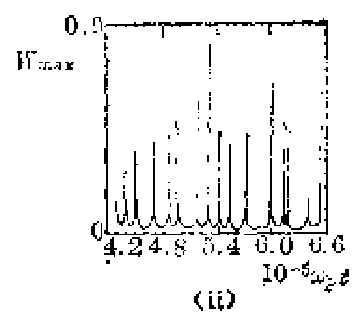
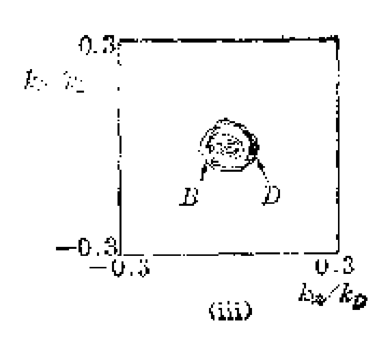




图 22-5 强湍流的朗缪尔波注入单色波源

$k_0=0.066k_D x$, $\gamma_0=-1.7\times10^{-4}W_p$.

(i) $\langle W\rangle$随时间 t 的发展

(ii) W_{max} 随时间 t 的发展

(iii) 能量谱的时间平均 $\log[W(k)/W(k)_{max}]$.

2．具阻尼的非线性薛定谔方程

$$i(\varepsilon_t+\hat{r}\varepsilon)+\varepsilon_{xx}+(|\varepsilon|^2-|\varepsilon|_0^2)\varepsilon=0, \tag{22.7}$$

其中 $\hat{r}$ 为阻尼算子．$F[\hat{r}\varepsilon]=r(k)\varepsilon_k(t)$，$|\varepsilon|_0^2$表示$|\varepsilon|^2$依空间的平均．设方程(22.7)的近似解为

$$\varepsilon(x,\ t)=\varepsilon_0(t)\exp[i(k_0x-\omega_0t)]+\varepsilon_1(t)\exp[i(k_1x-\omega_1t)]$$
$$+\varepsilon_2(t)\exp[i(k_2x-\omega_2t)], \tag{22.8}$$

其中 $2k_0=k_1+k_2$，$\omega_\sigma^2=k_\sigma^2(\sigma=0,\ 1,\ 2)$．将(22.8)代入(22.7)，化为关于 $\varepsilon_0(t)$、$\varepsilon_1(t)$、$\varepsilon_2(t)$ 的三个常微分方程组．D. A. Russell 和 B. Ott[145] 进行了数值计算，结果表明出现了倍周期分岔、奇异吸引子以及从混沌到周期解的切分岔等．

又如具耗散的非线性薛定谔方程[144]

$$iq_t+q_{xx}+|q|^2q=i\mu(q+q_{xx})-ir|q|^2, \tag{22.9}$$

当 μ、$r\ll1$ 时，可找到它的孤立子解：

$$q_s(x,\ t)=\frac{A_0\exp\left[iA_0^2\frac{t}{2}+\frac{ivt}{4}+\frac{iv(x-vt)}{2}\right]}{\cosh\frac{A_0(x-vt)}{2}}, \tag{22.10}$$

其中 $A_0=\sqrt{\frac{6}{(1+4r/\mu)}}$，$v$ 为孤立子传播速度．当 μ、$r\sim1$ 时，数值结果[142]表明将发生混沌现象．

3．黑本-西瓦申斯基型方程

1978年黑本(Y. Kuramoto)[138]在反应扩散系统的耗散结构以及1977年西瓦申斯基[139]在火焰燃烧和流体力学不稳定分析中，分别独立地得到如下的KS型方程(22.11)(其中 $\beta=0,\nu=0$)．后来，又在纳维-斯托克斯方程的分岔解[140]和粘性膜流动[141]中得到这类方程．

KS型方程

$$\phi_t+\frac{1}{2}\phi_x^2+\nu\phi+\alpha\phi_{xx}+\beta\phi_{xxx}+r\phi_{xxxx}=0, \qquad (22.11)$$

其中 $\alpha>0$，$\nu>0$，$r>0$．令 $\phi_x=u$，由(22.11)对 x 微分，得

$$u_t+uu_x+\nu u+\alpha u_{xx}+\beta u_{xxx}+ru_{xxxx}=0, \qquad (22.12)$$

其中 r 表示高阶粘性阻尼，ν 为线性阻尼，α 表示色扩散，β 表示色散系数．令

$$u=e^{ikx+\sigma t}, \qquad (22.13)$$

则可得到色散关系

$$\sigma=-\nu+\alpha k^2-rk^4+i\beta k^3. \qquad (22.14)$$

显然，当 $\mathrm{Re}\sigma>0$ 时，u 随时间 t 增长；反之，$\mathrm{Re}\sigma<0$，则受到阻尼．易知，当

$$\nu>\nu_0=\frac{\alpha^2}{4\sigma} \qquad (\sigma\ 为实数) \qquad (22.15)$$

时，为线性稳定；反之，为线性不稳定．当 $\nu=0$ 时，且

$$\beta u_{xxx}\sim uu_x\gg\alpha u_{xx}\sim ru_{xxxx}, \qquad (22.16)$$

可得到孤立子解

$$u(x,\ t)=N_0+N\,\mathrm{sech}^2\left[\left(\frac{N(\tau)}{12\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\left(x-\int_0^t\left(N_0+\frac{1}{3}N\right)dt\right)\right], \qquad (22.17)$$

其中 $N=N(\tau)$、$\tau=\varepsilon t$, $N(t)$ 满足方程

$$\frac{dN}{dt}=\left(\frac{4\gamma}{189\beta^2}\right)\left(\frac{21\alpha\beta}{5\gamma}-N\right)N^2. \tag{22.18}$$

反之，即

$$\beta u_{xxx}\sim uu_x\ll\alpha u_{xx}\sim\gamma u_{xxxx}, \tag{22.19}$$

则得到混沌解.

1987 年尼科拉延科(B. Nicolaenko)等人[143]对如下的 KS 型方程

$$\phi_t+4\phi_{xxxx}+\tilde{\alpha}\left(\phi_{xx}+\frac{1}{2}\phi_x^2\right)-\tilde{\delta}(\phi_x^3)_x+\tilde{\beta}\phi=0 \tag{22.20}$$

的周期问题:

$$\phi(x+2\pi,\ t)=\phi(x,\ t),\qquad \phi|_{t=0}=\phi_0(x) \tag{22.21}$$

进行了数值计算，其中 $\tilde{\alpha}=\delta\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2$, $\tilde{\delta}=4\delta=10^{-2}$, $\tilde{\beta}=4\beta\left(\frac{L}{2\pi}\right)^4$, $\delta=0.0025$, $\beta=0.1$, L 为分岔参数，得到如下的数值结果:

$23<\tilde{\alpha}\leqslant43.5$, 周期稳定，趋于不动点，不产生混沌.

$43.5<\tilde{\alpha}\leqslant58$, 阵发混沌，同宿环.

$58<\tilde{\alpha}\leqslant73$, 周期稳定，整体吸引子为不动点.

$73<\tilde{\alpha}\leqslant94$, 混沌、湍流.

$94<\tilde{\alpha}\leqslant128$, 周期稳定.

$128<\tilde{\alpha}\leqslant149$, 混沌、湍流.

$\tilde{\alpha}=88$, t 的各种不同情况，分别如图 22-6～图 22-10 所示.

随 α 的变化，分岔、混沌的图见图 22-11.

1989 年霍利姆斯(D. Holemes)[150]等对如下的 KS 方程

$$u_t+\alpha u_{xxxx}+u_{xx}+\frac{1}{2}u_x^2=0 \tag{22.22}$$

的周期问题

$$u(x+L,\ t)=u(x,\ t),\ u(x,\ 0)=u_0(x) \tag{22.23}$$

解的分岔问题进行了分析，他们用伽辽金(B. G. Gelerkin 方法，

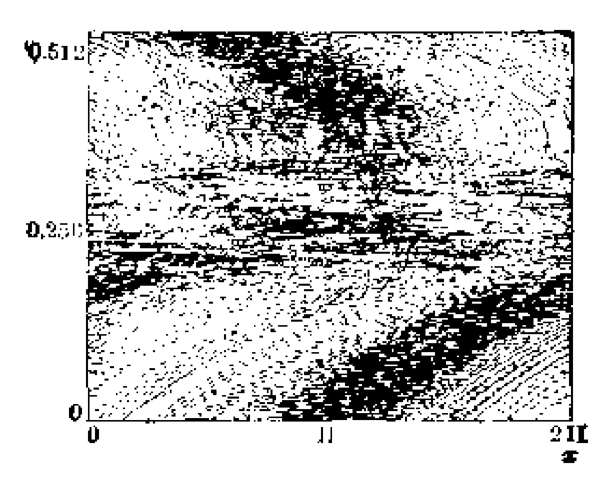


图 22-6 相干结构 $0<t<0.512$

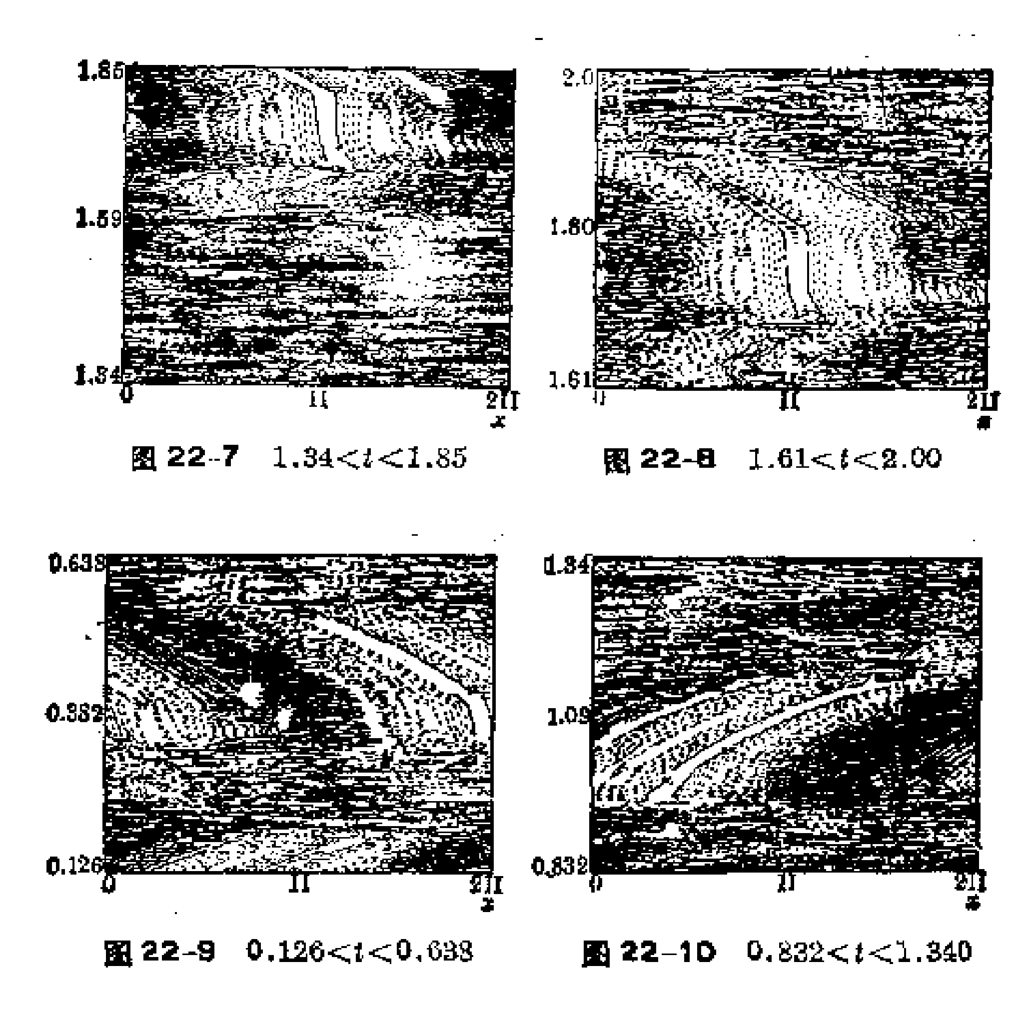


图 22-7 $1.34<t<1.85$

图 22-8 $1.61<t<2.00$

图 22-9 $0.126<t<0.638$

图 22-10 $0.832<t<1.340$

即对解作傅里叶展开

$$u(x,\ t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(t)\phi_k(x), \tag{22.24}$$

其中

$$\phi_k(x) = e^{i2\pi kx/L}, \qquad a_k = a_k^*. \tag{22.25}$$

将(22.24)代入(22.22)，可得

$$a_l'(t) = l^2\left(1 - \frac{l^2}{\mu}\right)a_l(t) + \frac{1}{2}\sum_j j(1-j)a_j a_{l-j}, \tag{22.26}$$

其中 $\mu = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2$． 在三阶截断和四阶截断的情况下可得到 $|a|$

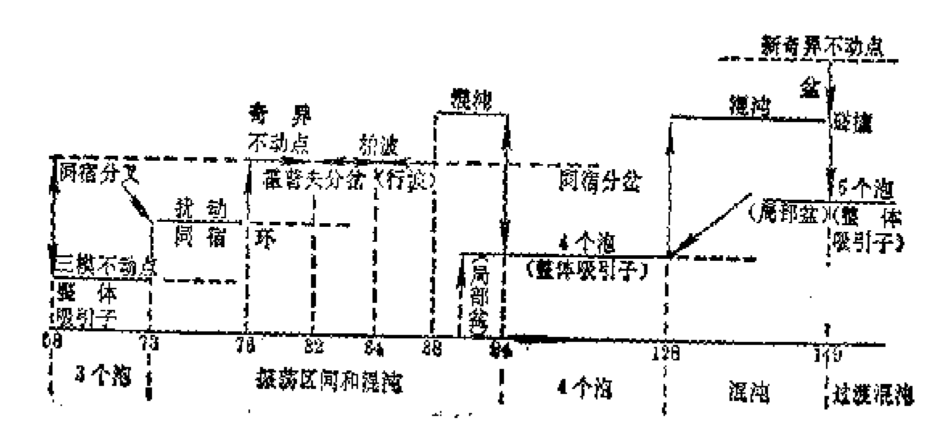


图 22-11 分岔、混沌图(随 $\tilde{\alpha}$ 变化)

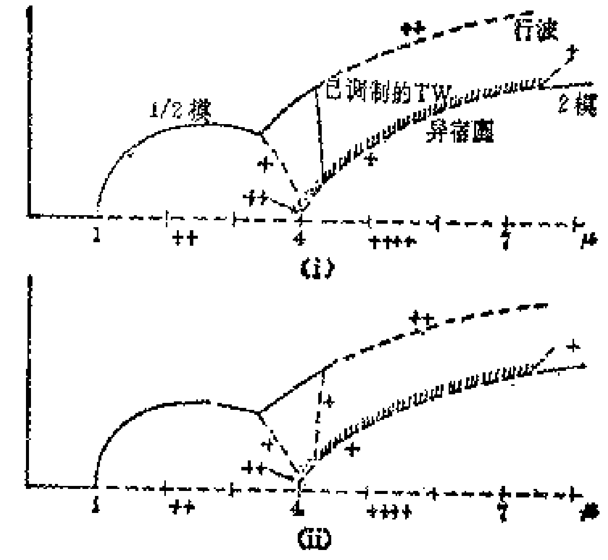


图 22-12 分岔图 (i) 截断到三阶 (ii) 截断到四阶
其中粗线表示稳定态，阴影线表示吸引的异宿轨道，虚线表示非吸引的异宿轨道，"+"表示正的(不稳定)特征值个数

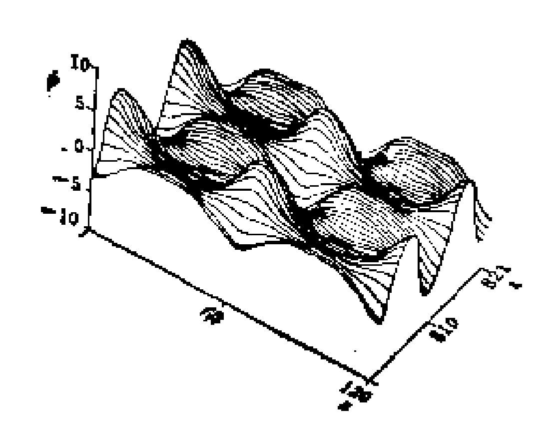
随 μ 变化的分岔图，如图 22-12 所示.

4. 具耗散和强迫振动项的正弦-戈登方程

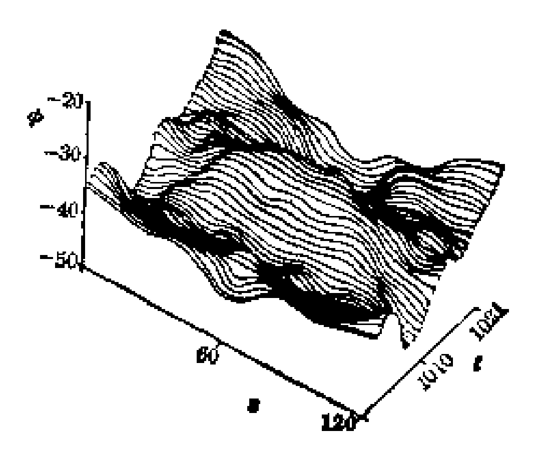
在约瑟夫森(B. D. Josephson)结[146]等许多物理问题中，提出了具耗散和强迫振动项的正弦-戈登方程

$$\phi_{tt}-\phi_{xx}+\sin\phi+\varepsilon\phi_t=\gamma\sin\omega t. \qquad (22.27)$$

毕肖普(A. R. Bishop)[147](1983)、奥尔森(O. H. Olsen)[148](1986)等提出：当 ε、γ 很小时，(22.27)的孤立子解是存在的，但其孤立子速度是变化的，孤立子靠近平衡态是振动的；当 ε、γ 较大时，出现混沌现象(如图 22-13 所示).



(i) $\varepsilon T=0.8$，具周期解的结果



(ii) $\varepsilon T=1.0$，具有混沌的正扭、反扭运动.

图 22-13 SG 方程具周期条件的解 $\phi(x, t)$ 的时空分布图 其中 $\varepsilon\alpha=0.2$, $w=0.6$

§ 23 整体吸引子及其豪斯多夫、分形维数估计

本节将引入无穷维动力系统中的非常重要的一个概念——整体吸引子，叙述整体吸引子的存在定理以及对其豪斯多夫维数、分形维数的估计.

定义 1 设 E 为巴拿赫空间，$S(t)$ 为半群算子，即有 $S(t)$: $E\to E$, $S(t+\tau)=S(t)\cdot S(\tau)$, $\forall t, \tau\geqslant 0$, $S(0)=I$(恒等算子). 如果紧集 $\mathscr{A}\subset E$ 满足:

（i）不变性　即在半群 $S(t)$ 作用下为不变集

$$S(t)\mathscr{A}=\mathscr{A}. \qquad \forall t\geqslant 0 \quad (23.1)$$

（ii）吸引性　$\mathscr{A}$ 吸引 E 中一切有界集，即对任何有界集 $B\subset E$ 有

$$\operatorname{dist}(S(t)B,\ \mathscr{A})=\sup_{x\in B}\inf_{y\in\mathscr{A}}\|S(t)x-y\|_E\to 0. \qquad t\to\infty \quad (23.2)$$

特别地，有当 $t\to\infty$ 时，从 u_0 出发的一切轨线 $S(t)u_0$ 收敛于 $\mathscr{A}$，即有

$$\operatorname{dist}(S(t)u_0,\ \mathscr{A})\to 0. \qquad t\to\infty \quad (23.3)$$

那么，紧集 $\mathscr{A}$ 称为半群 $S(t)$ 的**整体吸引子**.

整体吸引子的结构是很复杂的，除了包括非线性演化方程初值问题

$$\frac{du(t)}{dt}=F(u(t)), \quad (23.4)$$

$$u(0)=u_0 \quad (23.5)$$

的简单平衡点 u_*，$F(u_*)=0$（可能是多重解）外，还包括时间周期的轨道，拟周期解的轨道，以及分形、奇异吸引子等. 它可能不是光滑流形，且具有非整数维数.

为了给出整体吸引子的存在定理，我们需要引进吸收集的概念.

定义 2　对于有界集 $B_0\subset E$，如存在 $t_0(B_0)>0$，使得对任何有界集 $B\subset E$，有

$$S(t)B\subset B_0, \qquad (\forall t\geqslant t_0) \quad (23.6)$$

则称 B_0 为 E 中的有界吸收集（如图 23-1）.

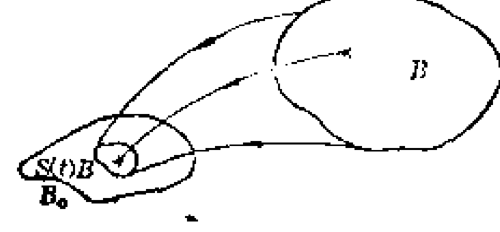


图 23-1

定理 1[46]　设 E 为巴拿赫空间，$\{S(t),\ t\geqslant 0\}$ 为半群算子，$S(t)$: $E\to E$，$S(t+\tau)=S(t)\cdot S(\tau)$，$t,\tau\geqslant 0$，$S(0)=I$，其中 I 为恒等算子. 设半群算子 $S(t)$ 满足以下条件:

（i）半群算子 $S(t)$ 在 E 中一致有界，即对一切 $R>0$，存在常数 $C(R)$，使得当 $\|u\|_E\leqslant R$ 时，有

$$\|S(t)\mathscr{U}\|_E\leqslant C(R). \qquad \forall t\in[0,\infty) \tag{23.7}$$

（ii）存在 E 中有界的吸收集 B_0. (23.8)

（iii）当 $t>0$ 时，$S(t)$ 为全连续算子.

则半群 $S(t)$ 具有紧的整体吸引子 $\mathscr{A}$.

附注 1 如将条件（ii）中的有界吸收集 B_0 改换为存在紧的吸收集合 B_0，则条件（iii）中 $S(t)$ 的全连续性可改为 $S(t)$ 为连续算子，这时定理 1 仍成立.

附注 2 可以证明上述的整体吸引子 $\mathscr{A}$ 为吸收集 B_0 的 ω 极限集，即有

$$\mathscr{A}=\omega(B_0)=\bigcap_{S\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant S}S(t)B_0}, \tag{23.9}$$

其中闭包在 E 上取.

另一个常用的吸引子的存在定理为:

定理 2[167] 设 E 为巴拿赫空间，半群算子 $S(t)$ 是连续的. 设存在一个开集 $\mathscr{U}\subset E$ 和 $\mathscr{U}$ 中的一个有界集 $\mathscr{B}$，使得 $\mathscr{B}$ 在 $\mathscr{U}$ 中是吸收的. 又设满足条件:

(1) 算子 $S(t)$ 对充分大的 t 是一致紧的，即对每个有界集 $\mathscr{B}$，存在 $t=t_0(\mathscr{B})$，使得

$$\bigcup_{t\geqslant t_0}S(t)\mathscr{B} \tag{23.10}$$

在 E 中是相对紧的. 或

(2) $S(t)=S_1(t)+S_2(t)$，其中算子 $S_1(\cdot)$ 对充分大的 t 是一致紧的（即满足条件（23.10）），算子 $S_2(t)$ 为连续映射，$S_2(t)$: $E\to E$，且对每个有界集 $B\subset E$，

$$r_B(t)=\sup_{\varphi\in B}\|S_2(t)\varphi\|_E\to 0, \tag{23.11}$$

则 $\mathscr{B}$ 的 ω 极限集 $\mathscr{A}=\omega(B)$ 是紧的吸引子，它吸引 $\mathscr{U}$ 中的有界集. 它是在 $\mathscr{U}$ 中的最大有界吸引子，且当 $\mathscr{U}$ 既凸又连通时，$\mathscr{A}$ 是连通的.

因此，要证明整体吸引子的存在性，就是要验证定理 1 或定理 2 的假设是否成立，最主要的是：

(i) 半群算子 $S(t)$ 的存在性.

(ii) 存在一个有界或紧的吸收集.

(iii) $S(t)$ $(t>0)$ 为全连续算子或满足条件(23.10)(或条件(23.11)).

为了对整体吸引子的几何性质作最简单的刻划，我们可对它的豪斯多夫维数、分形维数作一些估计.

定义 3 集合 X 的豪斯多夫测度为

$$\begin{aligned}\mu_H(x,\ d) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \mu_H(X,\ d,\ \varepsilon) \\ &= \sup_{\varepsilon>0} \mu_H(X,\ d,\ \varepsilon),\end{aligned} \tag{23.12}$$

其中

$$\mu_H(X,\ d,\ \varepsilon) = \inf \sum_i r_i^d, \tag{23.13}$$

这里 inf 是对一切覆盖 X 的半径 $r_i \leqslant \varepsilon$ 的球而取的. 存在一个数 $d = d_H(X) \in [0,\ +\infty]$，使得

$$\begin{aligned}&\mu_H(X,\ d) = 0, \qquad d > d_H(X), \\ &\mu_H(X,\ d) = \infty, \qquad d < d_H(X),\end{aligned} \tag{23.14}$$

则称这个数 $d_H(X)$ 为集合 X 的豪斯多夫维数.

定义 4 集合 X 的分形维数为

$$d_F(X) = \lim_{\varepsilon>0} \sup \frac{\log n_X(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}, \tag{23.15}$$

其中 $n_X(\varepsilon)$ 为覆盖 X 的半径 $\leqslant \varepsilon$ 的所有球的最小数目. 易知

$$d_F(X) = \inf\{d>0,\ \mu_F(X,\ d) = 0\}, \tag{23.16}$$

其中 $$\mu_F(X,\ d) = \lim_{\varepsilon\to 0} \sup \varepsilon^d n_X(\varepsilon).$$

因为 $\mu_F(X,\ d) \geqslant \mu_H(X,\ d)$，因此有

$$d_H(X) \leqslant d_F(X). \tag{23.19}$$

现考虑初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{du(t)}{dt}=F(u(t)),\quad t>0, & (23.20)\\ u(0)=u_0, & (23.21)\end{cases}$$

其中 $F(u)$ 为给定函数，$F(u):E\to E$，E 为巴拿赫空间．设对任何 $u_0\in E$，存在整体解 $u(t)\in E$．映射 $S(t)u_0:E\to E$ 为初值问题(23.20)、(23.21)的半群算子．

设 F 为弗雷歇可微，F：$E\to E$．线性初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dU(t)}{dt}=F'(S(t)u_0)\cdot U(t), & (23.22)\\ v(0)=\xi & (23.23)\end{cases}$$

对每个 u_0 和 $\xi\in E$ 是可解的．最后设 $S(t)$ 是可微的，具有导数 $L(t,u_0)$，定义为

$$L(t,u_0)\cdot\xi=U(t),\qquad \forall\xi\in E \quad (23.24)$$

且 $U(t)$ 是问题(23.22)、(23.23)的解．因为(23.22)是(23.20)的一变分方程，以上所作假设是很自然的，而且也是容易验证的．

对于固定的 $u_0\in L_2$，设 $\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_J$ 是 L_2 中的 J 个元素，令 $U_1(t),\ U_2(t),\ \cdots,\ U_J(t)$ 是线性化方程(23.22)具初值

$$U_1(0)=\xi_1,\quad U_2(0)=\xi_2,\quad \cdots,\quad U_J(0)=\xi_J$$

的 J 个解．通过直接计算，可得

$$\frac{d}{dt}\|U_1(t)\wedge\cdots\wedge U_J(t)\|^2_{L_2}-2\operatorname{tr}(F'(u(t)\cdot Q_J))\|U_1(t)\wedge\cdots< U_J(t)\|^2_{L_2}=0, \quad (23.25)$$

其中 $F'(u(t))=F'(S(t)u_0)$ 是线性映射 $U\to F'(u(t))U$，$u(t)=S(t)u_0$ 是问题(23.20)，(23.21)的解，"$\wedge$"表示外积，tr 表示算子的迹，Q_J 表示 L_2 到 $U_1(t)$，$U_2(t)$，$\cdots$，$U_J(t)$ 所成子空间的直交投影．J 维体积 $\wedge^J_{j=1}\xi$ 为：

$$\omega_J(t)=\sup_{u_0\in A}\sup_{\xi_j\in L_2}\|U_1(t)\wedge\cdots\wedge U_J(t)\|^2_{\wedge^J L_2}. \quad (23.26)$$

容易验证 $\omega_J(t)$ 关于 t 是次指数的，即有

$$\omega_j(t+t')\leqslant\omega_j(t)\omega_j(t'),\qquad (\forall t, t'\geqslant 0)\quad (23.27)$$

因此

$$\lim_{t\to\infty}\omega_j(t)^{\frac{1}{t}}=\Pi_j,\qquad (\forall j,\ 1\leqslant j\leqslant J)\quad (23.28)$$

是存在的. 由(23.25)可得:

$$\Pi_J\leqslant\exp\{q_J\},\qquad (23.29)$$

其中

$$q_J=\lim_{t\to\infty}\sup q_J(t),\qquad (23.30)$$

$$q_J(t)=\sup_{u_0\in A}\sup_{\substack{\xi_i\in L_2\\ |\xi_i|\leqslant 1}}\left\{\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{tr}(F'(S(\tau)u_0)Q_J(\tau))d\tau,\ i=1,2,\cdots,\right\}.\qquad (23.31)$$

定义 5 一组数列 $\Lambda_1, \Lambda_2, \cdots, \Lambda_m$ 定义如下:

$$\Lambda_1=\Pi_1,\ \ \Lambda_1\Lambda_2=\Pi_2,\ \cdots,\ \ \Lambda_1\cdots\Lambda_m=\Pi_m,$$

或者

$$\Lambda_1=\Pi_1,\ \Lambda_m=\frac{\Pi_m}{\Pi_{m-1}},\ \ m\geqslant 2,\qquad (23.32)$$

$$\Lambda_m=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\omega_m(t)}{\omega_{m-1}(t)}\right)^{\frac{1}{t}},\ \ m\geqslant 2,$$

则称 Λ_m 为在集合 A 上的整体(或一致)李雅普诺夫数, 称

$$\mu_m=\log\Lambda_m,\qquad m>1$$

为相应的李雅普诺夫指数. 由(23.29), 有

$$\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_J<q_J.\qquad (23.33)$$

定理 3 在以上关于初值问题(23.20)、(23.21)和初值问题(23.22)、(23.23)可解性假设之下, 如果对某个 m 和 $t_0>0$ 有

$$q_J(t)\leqslant-\delta<0,\qquad (\forall t\geqslant t_0)\quad (23.34)$$

则体积元 $\|U_1(t)\wedge\cdots\wedge U_J(t)\|_{\wedge^J L_2}$ 当 $t\to\infty$ 时指数衰减, 对 $u_0\in A$, $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_J\in L_2$ 一致有

$$\|U_1(t)\wedge\cdots\wedge U_J(t)\|_{\wedge^m L_2}$$
$$\leqslant\|U_1(t_0)\wedge\cdots\wedge U_m(t_0)\|_{\wedge^J L_2}\exp(-\delta(t-t_0)).$$

如果 A 关于半群 $S(t)$ 为泛函不变集，则对某 j，

$$q_j<0 \tag{23.35}$$

成立 $\Pi_j=\Lambda_1\Lambda_2\cdots\Lambda_j<1$，$\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_m<0$，由此推出

$$\Lambda_j<1, \tag{23.36}$$

即

$$\mu_j<0, \tag{23.37}$$

定理4[×] 设非线性演化方程的初值问题(23.20)、(23.21)存在整体吸引子，它在 $H^1(\Omega)$ 中有界. 设线性初值问题(23.22)、(23.23)是可解的；由初值问题(23.20)、(23.21)所确定的半群算子 $S(t)u_0$ 是可微的. 如果对于某 j，(23.30)式所定义的

$$q_j<0, \tag{23.38}$$

则整体吸引子 A 的豪斯多夫维数和分形维数是有限的，且 A 的豪斯多夫维数 $\leqslant j$. 它的分形维数小于或等于

$$j\left(1+\max_{1\leqslant l\leqslant j-1}\frac{(q_l)_+}{|q_j|}\right). \tag{23.39}$$

设 H 为希尔伯特空间，$X\subset H$ 为紧集，S 为非线性连续映射，$S:X\to H$，使

$$SX=X. \tag{23.40}$$

对于每个 $u\in X$，存在线性算子 $L(u)\in\mathscr{L}(H)$，且

$$\sup_{\substack{u,v\in X\\0<|u-v|<\varepsilon}}\frac{|Su-Sv-L(u)(u-v)|}{|u-v|}\to0,\quad\varepsilon\to0, \tag{23.41}$$

$$\sup_{u\in X}|L(u)|_{\mathscr{L}(H)}<+\infty, \tag{23.42}$$

$$\sup_{u\in X}\omega_d(L(u))<1,\ 对某个\ d>0, \tag{23.43}$$

其中 $\omega_d(L)=\omega_n^{1-s}(L)\omega_{n+1}^s(L)$，$d=n+s$.

定理5[167] 在假设(23.40)～(23.43)之下，X 的豪斯多夫维数是有限的，且小于或等于 d.

牛顿-布森内斯克方程展开三个模我们可近似得到洛伦兹模型，所满足的常微方程组为：

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} = \sigma x - y - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy - b(r+\sigma), \end{cases} \tag{23.44}$$

其中 $\sigma>0$, $r>0$, $b>1$. 现证 $u(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))$ 当 $t\to\infty$ 时保持有界，并存在吸收集. 由(23.44)可得:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2+\sigma x^2+y^2+bz^2=b(r+\sigma)z$$

$$\leqslant(b-1)z^2+\frac{b^2}{4(b-1)}(r+\sigma)^2,$$

$$\frac{d}{dt}|u|^2+2l|u|^2\leqslant\frac{b^2}{2(b-1)}(r+\sigma)^2,$$

$$l=\min(1,\ \sigma),$$

$$|u(t)|^2\leqslant|u(0)|^2e^{-2lt}+\frac{b^2}{4l(b-1)}(\nu+\sigma)^2$$

$$\cdot(1-\exp(-2(t))). \tag{23.45}$$

由此可得:

$$\limsup_{t\to H_0}|u(t)|\leqslant\rho_0,\qquad \rho_0=\frac{b(r+\sigma)}{2\sqrt{l(b-1)}}. \tag{23.46}$$

因此存在吸收集 $B(0,\ \rho)$: 以 0 为中心半径为 $\rho>\rho_0$ 的球. 事实上，如 $\mathscr{B}_0$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的一有界集，则

$$S(t)\mathscr{B}_0\subset B(0,\ \rho), \qquad (t>t(\mathscr{B}_0))$$

其中 $t(\beta_0)=\dfrac{1}{2l}\log\dfrac{R^2}{\rho^2-\rho_0^2}$(这里 R 为 $\mathscr{B}_0$ 的直径).

还容易验证，球 $B(0,\ \rho)$ 为正不变，即有

$$S(t)B(0,\ \rho)\subset B(0,\ \rho). \qquad (t\geqslant0)$$

由估计(23.45)很容易验证定理 2 的条件满足，因而存在洛伦兹模型的整体吸引子.

现在来估计洛伦兹吸引子的豪斯多夫维数. 改写(23.44)为

$$\dot{u}=F(u), \tag{23.47}$$

其中

$$F(\boldsymbol{u})=F(x,\ y,\ z)=-\begin{pmatrix}\sigma x-\sigma y\\ \sigma x+y+xz\\ bz-xy+b(r+\sigma)\end{pmatrix}. \quad (23.48)$$

(23.47)的第一变分形式为

$$\frac{dU}{dt}=F'(\boldsymbol{u})U, \quad (23.49)$$

其中 $F'(\boldsymbol{u})$为如下的 3×3 矩阵:

$$-F'(\boldsymbol{u})\cdot U=\boldsymbol{A}_1U+\boldsymbol{A}_2U+B(\boldsymbol{u})U,$$

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}\sigma & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0 & -\sigma & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad (23.50)$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u})=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ z & 0 & x\\ -y & -x & 0\end{pmatrix}, \quad \forall\boldsymbol{u}=(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3.$$

现考虑初值问题(23.47)具初始条件

$$U(0)=\boldsymbol{\xi}, \qquad (\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^3)\ (23.51)$$

其中 $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3), \qquad \boldsymbol{U}=(U_1,\ U_2,\ U_3).$

考虑二维和三维体积元的变化

$$\frac{d}{dt}|U_1\wedge U_2\wedge U_3|=|U_1\wedge U_2\wedge U_3|\operatorname{tr}F'(\boldsymbol{u}), \quad (23.52)$$

$$\frac{d}{dt}|U_1\wedge U_2|=|U_1\wedge U_2|\operatorname{tr}(F'(\boldsymbol{u})\cdot Q), \quad (23.53)$$

其中 $Q=Q_2(t,\ u_0,\ \xi_1,\ \xi_2)$为 $\mathbb{R}^3$ 空间在 $U_1(t)$、$U_2(t)$所张空间的正交投影. 由(23.50)可知 $F'(\boldsymbol{u})$的迹为 $-(\sigma+b+1)$. 由(23.25)可知

$$|U_1(t)\wedge U_2(t)\wedge U_3(t)|$$
$$=|\xi_1\wedge\xi_2\wedge\xi_3|\cdot\exp(-(\sigma+b+1)t), \quad (23.54)$$

因而对于洛伦兹方程, 三维无穷小体积元随时间指数衰减. 由(23.49), 有

$$\sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^3\\|\xi_i|\leqslant 1, i=1,2,3}} |U_1(t)\wedge U_2(t)\wedge U_3(t)| \leqslant \exp(-(\sigma+b+1)t), \tag{23.55}$$

$$\omega_3(t)=e^{-(\sigma+b+1)t}, \tag{23.56}$$

$$\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3=\lim_{t\to\infty}\omega_3(t)^{\frac{1}{t}}=e^{-(\sigma+b+1)}, \tag{23.57}$$

$$\mu_1+\mu_2+\mu_3=-(\sigma+b+1), \tag{23.58}$$

其中 Λ_1, Λ_2, Λ_3 和 μ_1, μ_2, μ_3 分别为罗伦兹吸引子的一致李雅普诺夫数和李雅普诺夫指数.

类似地, 从(23.48)有

$$|U_1(t)\wedge U_2(t)|=|\xi_1\wedge\xi_2|\exp\int_0^t(\mathrm{tr}F'(\boldsymbol{u}(\tau)),\ Q(\tau))d\tau. \tag{23.59}$$

如 $\xi_1\wedge\xi_2\neq 0$, 则 $|U_1(t)\wedge U_2(t)|\neq 0$. 此时设 φ_1、φ_2、φ_3 为 $\mathbb{R}^3$ 的正交基, 使得 φ_1、φ_2 为 $[U_1(t),\ U_2(t)]$ 所张子空间的基函数, 则

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2)\cdot Q=\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_1\cdot Q\geqslant 1+b+\sigma-m,$$

其中 $m=\max(1,\ b,\ \sigma)$;

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u})\cdot Q)=\sum_{i=1}^{2}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{\varphi}_i)\boldsymbol{\varphi}_i,$$

其中 $\boldsymbol{\varphi}_i=(x_i,\ y_i,\ z_i)$, 于是有

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u})\cdot Q)=\sum_{i=1}^{2}(z x_i y_i-x_i z_i y)=-z x_3 y_3+x_3 z_3 y,$$

$$\begin{aligned}|\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}(u)\cdot Q)| &\leqslant |x_3|\sqrt{y_3^2+z_3^2}\sqrt{y^2+z^2}\\ &\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{x_3^2+y_3^2+z_3^2}\sqrt{y^2+z^2}\\ &\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{y^2+z^2}\leqslant\frac{1}{2}|u|.\end{aligned}$$

由(23.42)对 t 充分大, $t\geqslant t_1(\delta)$,

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u})\cdot Q)\geqslant-\frac{b(r+\sigma)}{4\sqrt{L(b-1)}}-\delta,$$

其中 $\delta>0$ 充分小. 因此

$$|U_1(t)\wedge U_2(t)|\leqslant|\xi_1\wedge\xi_2|\exp((k_2+\delta)t), \tag{23.60}$$

其中

$$k_2=-(\sigma+b+1)+m+\frac{b(r+\sigma)}{4\sqrt{L(b-1)}}, \tag{23.61}$$

$$\sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^3\\ |\xi_i|\leqslant 1,\, i=1,2}}|U_1(t)\wedge U_2(t)|\leqslant \exp((k_2+\delta)t),\quad t\geqslant t_1(\delta). \tag{23.62}$$

因此，

$$\omega_2(t)\leqslant \exp((k_2+\delta)t),\quad t\geqslant t_1(\delta). \tag{23.63}$$

因 $\delta>0$ 任意小，令 $t\to\infty$，有

$$\Lambda_1\Lambda_2=\lim_{t\to\infty}\omega_2(t)^{\frac{1}{t}}\leqslant \exp k_2, \tag{23.64}$$

$$\mu_1+\mu_2\leqslant k_2. \tag{23.65}$$

令 $d=2+S$，$0<S<1$，$t\geqslant t_1(\delta)$，且

$$k(\delta)=-S(\sigma+b+1)+(1-S)(k_2+\delta)<0, \tag{23.66}$$

则从(23.55)和(23.63)有

$$\omega_d(t)\leqslant W_2^{1-S}(t)W_3^S(t)\leqslant \exp(k(\delta)t)<1.$$

由定理5可知洛伦兹吸引子 A 的豪斯道夫维数 $\leqslant d$，只要(23.66)成立，即

$$S>\frac{k_2+\delta}{\sigma+b+1+k_2+\delta}. \tag{23.67}$$

因此

$$d_H(A)\leqslant 2+\frac{k_2+\delta}{\sigma+b+1+k_2+\delta}. \tag{23.68}$$

因 $\delta>0$ 为任意小，推出

$$d_H(A)\leqslant 2+\frac{k_2}{\sigma+b+1+k_2}, \tag{23.69}$$

由此可得：

定理6 设

$$\sigma>0,\quad r>0,\quad b>1, \tag{23.70}$$

则洛伦兹吸引子 A 的豪斯多夫维数是有界的，如不等式(23.69)

所表示，其中 $m=\max(1, b, \sigma)$.

如 $\sigma=10$、$r=8$、$b=\frac{8}{3}$(洛伦兹原始模型)，则

$$d_H(A)\leqslant 2.588.$$

§24 具弱阻尼的 KdV 方程的整体吸引子及其豪斯多夫维数估计

我们考虑如下具阻尼的 KdV 方程

$$u_t+uu_x+u_{xxx}+\nu u=f \tag{24.1}$$

具周期边界条件

$$u(x+L, t)=u(x, t), \qquad \forall x\in \mathbb{R}, \ t\geqslant 0 \tag{24.2}$$

$$u(x, 0)=u_0(x) \tag{24.3}$$

的整体吸引子的存在问题. 其中 $\nu>0$, $f(x, t)$为已知函数. 从已知结果[44]，当 $u_0(x)$、$f(x, t)$适当光滑时，问题(24.1)、(24.2)、(24.3)的整体解是存在的. 当 $f(x, t)$与无关，或是 t 的周期函数时，问题(24.1)～(24.3)形成半群 $\{S(t)\}_{t>0}$, 即有

$$S(0)=I, \ S(t_1+t_2)=S(t_1)S(t_2), \quad \forall t_i\in \mathbb{R}^+ \tag{24.4}$$

容易证明，半群算子 $S(t)$是弱连续的: $H^2(\Omega)\to H^2(\Omega)$, $\Omega=[0, L]$.

以下我们先建立周期边界问题(24.1)～(24.3)关于时间 t 的一致先验估计，以建立吸收集，并证明整体吸引子的存在性.

§24.1 对间 t 的一致的先验估计

分别以乘子

$$M_0(u)=2u, \tag{24.5}$$

$$M_1(u)=2u_{xx}+u^2, \tag{24.6}$$

$$M_2(u)=\frac{18}{5}u_{xxxx}+6uu_{xx}+3u_x^2+u^3 \tag{24.7}$$

乘以(24.1)，可得如下的"能量方程"：

$$\frac{d}{dt}\int u^2dx+\int(2\nu u^2-2fu)dx=0, \tag{24.8}$$

$$\frac{d}{dt}\int\left(u_x^2-\frac{u^3}{3}\right)dx+\int(2\nu(u_x^2-u^3)+fu^2+2f_xu_x)dx=0, \tag{24.9}$$

$$\frac{d}{dt}\int\left\{\frac{9}{5}u_{xx}^2-3uu_x^2+\frac{u^4}{4}\right\}dx+\int\left\{\nu\left(\frac{18}{5}u_{xx}^2+6u^2u_{xx}+3uu_x^2+u^4\right)+\frac{18}{5}f_{xx}u_{xx}+6ufu_{xx}+3fu_x^2+fu^3\right\}dx=0. \tag{24.10}$$

引理 1 设 $\nu>0$, $f\in H^2$, 则存在常数 $\rho_2=\rho_2(L,\nu,\|f\|_2)$，使得对任何 $R>0$，存在 $T_2(R)$，使得

$$\|S(t)u_0\|_2\leqslant\rho_2,\ \forall u_0\in H_2,\ \|u_0\|_2\leqslant R,\ \forall t\geqslant T_2(R), \tag{24.11}$$

其中 $\|v\|_m=\sum_{k=0}^m L^{2k}|v|_k^2$ $|v|_k^2=\int\left|\frac{d^kv}{dx^k}\right|^2dx$. 换言之，在 H^2 中的闭球

$$B_2=\{v\in H^2,\ \|v\|_2\leqslant\rho_2\} \tag{24.12}$$

是半群 $\{S(t)\}$ 的有界吸收集. 即对每个有界集 $B\in H^2$，存在 $T_2(B)$，使得

$$S(t)B\subset B_2. \qquad (\forall t\geqslant T_2(B)) \tag{24.13}$$

证明 我们用(24.8)得到 $|S(t)u_0|_0$, (24.9)得到 $|S(t)u_0|_1$，最后由(24.10)得到 $|S(t)u_0|_2$. 先由(24.8)得到：

$$\frac{d}{dt}|u|_0^2+2\nu|u|_0^2\leqslant2|f|_0|u|_0, \tag{24. 4}$$

因此

$$|S(t)u_0|_0\leqslant|u_0|_0e^{-\nu t}+|f|_0(1-e^{-\nu t})/\nu, \tag{24.15}$$

这就表明 $S(t)u_0$ 在 L_2 中是一致有界的，且

$$|S(t)u_0|_0 \leqslant 2|f|_0/\nu, \quad t \geqslant T_0(u_0), \tag{24.16}$$

其中

$$T_0(u_0)=\frac{1}{\nu}\log\frac{\nu|u_0|_0}{|f|_0}. \tag{24.17}$$

由(24.9)，令

$$\varphi(u)=\int\left(u_x^2-\frac{u^3}{3}\right)dx, \tag{24.18}$$

$\varphi(u)$具有下界

$$\varphi(u)\geqslant\frac{1}{2}|u|_1^2-\frac{2^{\frac{1}{3}}}{4}|u|_0^{\frac{10}{3}}-L^{-\frac{1}{2}}|u|_0^3, \tag{24.19}$$

这是由于

$$\left|\int u^3\,dx\right|\leqslant|u|_{L^\infty}|u|_0^2. \tag{24.20}$$

利用估计式

$$|v|_{L^\infty}\equiv\sup_{0\leqslant x\leqslant L}|v(x)|\leqslant|v|_0^{\frac{1}{2}}\left(2|v|_1+\frac{1}{L}|v|_0\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{24.21}$$

因而

$$\begin{aligned}\left|\int u^3\,dx\right|&\leqslant|u|_0^{\frac{5}{2}}(2|u|_1+L^{-1}|u|_0)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\sqrt{2}\,|u|_0^{\frac{5}{2}}|u|_1^{\frac{1}{2}}+L^{-\frac{1}{2}}|u|_0^3,\end{aligned} \tag{24.22}$$

再利用 Young 不等式，有

$$\left|\int u^3\,dx\right|\leqslant\frac{1}{2}|u|_1^2+\frac{2^{\frac{1}{3}}}{4}|u|_0^{\frac{10}{3}}+L^{-\frac{1}{2}}|u|_0^3. \tag{24.23}$$

为了估计(24.9)式的第二项，可把它写成$\nu\varphi(u)+\xi(u)$的形式，其中

$$\xi(u)=\nu|u|_1^2-\frac{5}{3}\nu\int u^3\,dx+\int(fu^2-2f_xu_x)\,dx. \tag{24.24}$$

再利用(24.23)可得：

$$\begin{aligned}\xi(u)\geqslant&\frac{\nu}{6}|u|_1^2-\frac{2^{\frac{1}{3}}5\nu}{4}|u|_0^{\frac{10}{3}}-\frac{5\nu L^{-\frac{1}{2}}}{3}|u|_0^3\\&-|f|_\infty|u|_0^2-2|f|_1|u|_1,\end{aligned}$$

$$-\xi(u) \leqslant \frac{6}{\nu}|f|_1^2 + |f|_{L^\infty}|u|_0^2 + \frac{2^{\frac{1}{3}}5\nu}{4}|u|_0^{\frac{10}{3}}$$

$$+\frac{5\nu L^{-\frac{1}{2}}}{3}|u|_0^3. \tag{24.25}$$

(24.9)改写为

$$\frac{d}{dt}\varphi(u) + \nu\varphi(u) = -\xi(u),$$

由(24.15)和(24.25)可得:

$$\frac{d\varphi(u)}{dt} + \nu\varphi(u) \leqslant K_1(u_0)e^{-\nu t} + K_2, \tag{24.26}$$

其中

$$K_1(u_0) = |f|_{L^\infty}|u_0|_0^2 + \frac{2^{\frac{1}{3}}5\nu}{4}|u_0|^{\frac{10}{3}} + \frac{5\nu L^{-\frac{1}{2}}}{3}|u_0|_0^3, \tag{24.27}$$

$$K_2 = 6\nu^{-1}|f|_1^2 + |f|_{L^\infty}|f|_0^2\nu^{-2} + \frac{2^{\frac{1}{3}}5}{4}|f|_0^{\frac{10}{3}}\nu^{-\frac{7}{3}}$$

$$+\frac{5}{3}L^{-\frac{1}{2}}|f|_0^3\nu^{-2}. \tag{24.28}$$

不等式(24.26)乘以 $e^{\nu t}$, 并在$[0, t]$上积分, 可得:

$$\varphi(u(t)) \leqslant (\varphi(u_0) + K_1(u_0)t)e^{-\nu t} + K_2(1-e^{-\nu t})\nu^{-1}. \tag{24.29}$$

由(24.23)可得:

$$\varphi|u(t)| \leqslant \left\{\frac{3}{2}|u_0|_1^2 + \frac{2^{\frac{1}{3}}3}{4}|u_0|_0^{\frac{10}{3}} + L^{-\frac{1}{2}}|u_0|_0^3\right.$$

$$\left.+K_1(u_0)t\right\}e^{-\nu t} + \frac{K_2}{\nu}. \tag{24.30}$$

注意到不等式(24.19), 由不等式(24.30)可知 $|u(t)|_1 = |S(t)u_0|_1$ 当 $t\to\infty$ 时保持有界, 再利用(24.16), 我们可找到: $\rho_1 = \rho_1(\nu, f, L)$和 $T_1(u_0)$ (它依赖于 $\|u_0\|_1$), 使得

$$\|S(t)u_0\|_1 \leqslant \rho_1, \qquad \forall t \geqslant T_1(u_0) \tag{24.31}$$

引入

$$\psi(u)=\frac{9}{5}|u|_2^2+\int\left\{\frac{u^4}{4}-3uu_x^2\right\}dx, \tag{24.32}$$

把(24.10)表示成

$$\frac{d}{dt}\psi(u(t))+\psi(u(t))=-\eta(u(t)), \tag{24.33}$$

在此式中，$\psi(u)$的主要项是 $\frac{9}{5}|u|_2^2$，而 $\eta(u)$是有界于$O(\|u\|_1)$的，因此，可类似估计得到(24.11)．

由此可得到：

定理1 集合

$$\mathscr{A}=\omega(B_2)=\bigcap_{s>0}\overline{\bigcup_{t>s}S(t)B_2} \tag{24.34}$$

满足

1．$\mathscr{A}$在H^2中是有界的和弱闭的，

2．$S(t)\mathscr{A}=\mathscr{A}$，

3．对每个有界集$B\subset H^2$，当$t\to\infty$时集合$S(t)B$依H^2弱拓扑趋于$\mathscr{A}$，

其中，在(24.34)中记号"——"表示依H^2弱拓扑取闭包．

现转为估计吸引子的维数．考虑如下方程——方程(24.1)的第一变分方程：

$$v_t+(uv)_x+v_{xxx}+\nu v=0, \tag{24.35}$$

$$v(x+L,\ t)=v(x,\ t),\qquad \forall x\in\mathbb{R},\ \forall t \tag{24.36}$$

$$v(x,\ 0)=v_0(x), \tag{24.37}$$

其中u为轨线：$u(t)=S(t)u_0$，$t\in\mathbb{R}$，$u_0\in H^2$，且

$$v_0(x)\in H^2. \tag{24.38}$$

因为$u\in L^\infty(0,\ \infty,\ H^2)$，容易证明线性问题(24.35)～(24.38)具有

$$v\in L^\infty(0,\ \infty,\ H^1). \tag{24.39}$$

我们可证明线性映射

$$(DS(t)u_0)v_0=v(t) \tag{24.40}$$

为 $S(t)$ 的"一致微分". 容易证明:

命题 1 对任何 R 和 T, $0<R$, $T<\infty$. 存在常数 $C=C(R, T)$ 使得对任何满足

$$\|u_0\|\leqslant R, \qquad |u_0+h_0|\leqslant R, \qquad |t|\leqslant T \tag{24.41}$$

的 u_0、h_0 和 t, 有

$$\|S(t)(u_0+h_0)-S(t)u_0-(DS(t)u_0)h_0\|_1\leqslant C\|h_0\|_1^2. \tag{24.42}$$

现研究线性算子 $v(t)=DS(t)u_0$, $u_0\in\mathscr{A}$ 在 H^1 上 m 维体积的变化. 取 m 个元素 v_0^1, v_0^2, $\cdots$, $v_0^m\in H^1$, 考虑格拉姆(J. P. Gram)行列式

$$\|v^1(t)\wedge\cdots\wedge v^m(t)\|_1^2=\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}((v^i(t), v^j(t)))_1 \tag{24.43}$$

随时间 t 的变化, 其中 $v^i(t)=(DS(t)u_0)v_0^i$, $((\cdot, \cdot))_1$ 表示依模 $\|\cdot\|_1$ 的数量积(于此 $u_0\in H^2$). 如所周知, (24.43)表示 $m!$ 个由向量 $v^1(t)$, $v^2(t)$, $\cdots$, $v^m(t)$ 形成的多面体的体积的平方. 我们将证明对于充分大的 m, 当 $t\to\infty$ 时, 这个行列式以指数衰减.

为此, 我们需要几个有关希尔伯特空间上外代数的几个引理.

引理 2 设 φ 为在 H 上的双线性对称形式, 它是强制和有界的: 即存在正数 a 和 b, 使得:

$$a|\eta|^2\leqslant\varphi(\eta, \eta)\leqslant b|\eta|^2, \qquad \forall\eta\in H \tag{24.44}$$

则对一切 η^1, η^2, $\cdots$, $\eta^m\in H$, 有

$$\begin{aligned} a^m\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}(\eta^i, \eta^j)&\leqslant\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}\varphi(\eta^i, \eta^j)\\ &\leqslant b^m\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}(\eta^i, \eta^j). \end{aligned} \tag{24.45}$$

证明 取 η^1, η^2, $\cdots$, $\eta^m\in H$, 则在 $\mathbb{R}^m$ 上二次形式的行列式

$$(x_1, x_2, \cdots, x_m)\to\varphi\left(\sum_{i=1}^m x_i\eta^i, \sum_{i=1}^m x_i\eta^i\right)$$

也是格拉姆行列式 $\det\limits_{1\leqslant i,j\leqslant m}\varphi(\eta^i, \eta^j)$. 它等于二次形式 m 个特征值的乘积, 即

$$\det_{1\le i,j\le m}\varphi(\eta^i,\ \eta^j)=\prod_{l=1}^{m}\max_{\substack{G\subset\mathbb{R}^m\\ \dim G=l}}\ \min_{\sum_{i=1}^m x_i^2=1}\varphi\left(\sum_{i=1}^m x^i\eta^i,\ \sum_{i=1}^m x_i\eta^i\right). \tag{24.46}$$

利用(24.44)于(24.46)，即得(24.45)。

引理 3 在 $\mathbb{R}^m$ 上考虑两个双线性对称形式 ψ 和 ψ_2. 设 ψ 为正定的，并用 $\{\omega_l\}_{l=1}^m$ 表示 ψ_2 关于 ψ 的序列，即

$$\omega_l=\max_{\substack{F\subset\mathbb{R}^m\\ \dim F=l}}\ \min_{\substack{x\in F\\ x\neq 0}}\frac{\psi_2(x,\ x)}{\psi(x,\ x)},\ (l=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{24.47}$$

则对任何 $\xi^1,\ \xi^2,\ \cdots,\ \xi^m\in\mathbb{R}^m$ 有

$$\sum_{l=1}^m\det_{1\le i,j\le m}\{(1-\delta_{jl})\psi(\xi^i,\ \xi^j)+\delta_{jl}\psi_2(\xi^i,\ \xi^j)\}$$
$$=\left(\sum_{l=1}^m\omega_l\right)\det_{1\le i,j\le m}\psi(\xi^i,\ \xi^j). \tag{24.48}$$

证明 以 $\{\theta^1,\ \theta^2,\ \cdots,\ \theta^m\}$ 为 $\mathbb{R}^m$ 的一组基，它使 ψ 和 ψ_2 对角化，即有

$$\psi(\theta^i,\ \theta^j)=\delta_{ij},\qquad \psi_2(\theta^i,\ \theta^j)=\omega_i\delta_{ij}.$$

ξ^i 依基 θ^j 展开，有 $\xi^i=\sum_j p_{ij}\theta^j$. 则

$$\psi(\xi^i,\ \xi^j)=\sum_a p_{ia}p_{ja},\qquad \psi_2(\xi^i,\ \xi^j)=\sum_a\omega_a p_{ia}p_{ja}.$$

于是有

$$(1-\delta_{jl})\psi(\xi^i,\ \xi^j)+\delta_{jl}\psi_2(\xi^i,\ \xi^j)$$
$$=\sum_a p_{ia}p_{ja}(1-\delta_{jl})+\omega_a\delta_{jl})=\sum_a p_{ia}Q^l_{aj},$$

其中 $Q^l_{aj}=((1-\delta_{jl})+\omega_a\delta_{jl})p_{ja}$. (24.48)式左端为

$$\sum_{l=1}^m\det(pQ^l)=\det p\sum_{l=1}^m\det Q^l$$
$$=\det p\cdot\sum_{l=1}^m\det\{(1-\delta_{jl})+\omega_a\delta_{jl})\delta_{ja}\}$$
$$=\det p\cdot\sum_{l=1}^m\omega_l.$$

由此即得(24.51)。

现在在无穷维希尔伯特空间 H 上给定两族二次形式 $q(t;\cdot)$ $r(t;\cdot)$, $t\in[0,T]$, $0<T\leqslant\infty$. 同时也在 H 上给出一族线性连续算子 $\{L(t),\ 0\leqslant t<T\}$, 使得 $L(0)=I$ 对于 $\eta_0\in H$, 函数

$$t\to q(t;L(t)\eta_0)$$

从 $[0,T]$ 到 $\mathbb{R}$ 为绝对连续, 且对几乎处处 $t\in[0,T]$ 满足

$$\frac{d}{dt}\{q(t;L(t)\eta_0)\}=r(t;L(t)\eta_0). \tag{24.49}$$

以 $|\cdot|$ 和 $(\cdot,\cdot)$ 表示在 H 上的模和内积, 以 $\tilde{\varphi}$ 表示二次型 φ 在 H 上的极坐标形式, 现设 $q(t;\cdot)$ 在 $[0,T]$ 上为一致强制的和有界的. 即存在正常数 $\alpha(T)$ 和 $\beta=\beta(T)$, 使

$$\alpha|\eta|^2\leqslant q(t;\eta)\leqslant\beta|\eta|^2,\qquad\forall t\in[0,T] \tag{24.50}$$

且设在 H 上存在一个非负, 自共轭和紧算子 K, 常数 C_0 和 $\sigma\in[0,1]$ 使得对几乎处处的 $t\in[0,T]$,

$$|r(t;\eta)|\leqslant C_0|\eta|^{2(1-\sigma)}(K\eta,\eta)^\sigma,\quad\forall\eta\in H \tag{24.51}$$

以 $\{\mathscr{K}_i\}_{i=1}^\infty$ 表示算子 K 的特征值的非增序列, 以下给出格拉姆行列式

$$G_m(t)=\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}(L(t)\eta_0^i,\ L(t)\eta_0^j) \tag{24.52}$$

的估计, 其中 $\eta_0^1,\eta_0^2,\cdots,\eta_0^m$ 为 H 中的任意元素.

定理 2 在上述有关 $q(t;\cdot)$ 和 $r(t;\cdot)$ 假设下, 有如下估计:

$$\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}(L(t)\eta_0^i,\ L(t)\eta_0^j)\leqslant\left\{\beta^m\alpha^{-m}\exp\left(\frac{c_0}{\alpha}\sum_{i=1}^m\mathscr{K}_i^\sigma\right)t\right\}\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}(\eta_0^i,\eta_0^j).$$

$$\forall t\in[0,T] \tag{24.53}$$

证明 如 $\eta_0^1,\eta_0^2,\cdots,\eta_0^m$ 是线性相关的, 则 $G_m(t)=0$, $\forall t\in[0,T]$, (24.53) 显然成立. 现设 $\eta_0^1,\eta_0^2,\cdots,\eta_0^m$ 是独立的, 置

$$H_m(t)=\det\tilde{q}(t;L(t)\eta_0^i,\ L(t)\eta_0^j), \tag{24.54}$$

由引理 2, 对固定的 $t\in[0,T]$ 和 $\varphi(\eta,\eta)=\tilde{q}(t;L(t)\eta,L(t)\eta)$ 和 (24.50), 可知 (24.44) 成立. 由 (24.45), 有

$$\alpha^m G_m(t) \leqslant H_m(t) \leqslant \beta^m G_m(t), \quad \forall t \in [0, T] \tag{24.55}$$

置 $\eta^i(t) = L(t)\eta_0^i$. 改写 $H_m(t)$ 为

$$H_m(t) = \det_{1 \leqslant i,j \leqslant m} \tilde{q}(t; \eta^i(t), \eta^j(t)),$$

按照古典的行列式求导法则，有

$$\frac{d}{dt} H_m(t) = \sum_{l=1}^{m} \det_{1 \leqslant i,j \leqslant m} \{(1-\delta_{il})\tilde{q}(t; \eta^i(t), \eta^j(t)) + \delta_{il} \frac{d}{dt} \tilde{q}(t; \eta^i(t), \eta^j(t))\}, \tag{24.56}$$

其中 δ_{il} 是克朗涅克(L. Kronecker)符号. 现对固定的 $t \in [0, T]$, 由(24.56), 并将

$$\psi = \tilde{q}(t; \cdot), \qquad \psi_2 = \tilde{r}(t; \cdot)$$

应用到引理 3, 即对 $x \in \mathbb{R}^m$, 置

$$\psi(x, x) = q\left(t; \sum_{i=1}^{m} x_i L(t) \eta_0^i\right) = q(t; L(t)\eta_0),$$

于此 $\eta_0 = \sum_{i=1}^{m} x_i \eta_0^i$. 由(24.52), 有

$$\frac{d}{dt}\{q(t; L(t)\eta_0)\} = r(t; L(t)\eta_0) = \psi_2(x; x).$$

于是, 由(24.48)和(24.56), 有

$$\frac{d}{dt} H_m(t) = \left(\sum_{l=1}^{m} w_l(t)\right) H_m(t). \tag{24.57}$$

由(24.47)估计 $w_l(t)$, 即

$$w_l(t) = \max_{\substack{F \subset \mathbb{R}^m \\ \dim F = l}} \min_{\substack{x \in F \\ x \neq 0}} \frac{r\left(t; \sum_{i=1}^{m} x_i \eta_i(t)\right)}{q\left(t; \sum_{i=1}^{m} x_i \eta_i(t)\right)}, \tag{24.58}$$

置 $\eta_0 = \sum_{i=1}^{m} x_i \eta_0^i$, 并注意到(24.50)、(24.51)和 $\eta(t) = L(t)\eta_0$, 有

$$\frac{r(t; \eta(t))}{q(t; \eta(t))} \leqslant \frac{|r(t; \eta(t))|}{q(t; \eta(t))} \leqslant \frac{c_0 |\eta(t)|^{2(1-\sigma)} |(K\eta(t), \eta(t))|^\sigma}{\alpha |\eta(t)|^2}$$

$$\leqslant \frac{c_0}{\alpha}\left\{\frac{(K\eta(t),\ \eta(t))}{|\eta(t)|^2}\right\}^\sigma.$$

由(24.58), 有

$$\left(\frac{\alpha}{c_0}|w_l(t)|\right)^{\frac{1}{\sigma}} \leqslant \max_{\substack{F\subset\mathbb{R}^m \\ \dim F=l}} \min_{\substack{x\in F \\ x\neq 0}} \frac{(K\eta(t),\ \eta(t))}{|\eta(t)|^2}, \tag{24.59}$$

其中 $$\eta(t)=\sum_{i=1}^m x_i L(t)\eta_0^i.$$

注意到 η_0^1, η_0^2, $\cdots$, η_0^m 是独立的, $G_m(0)>0$ 和(24.58), 可知存在 $T_{\max}\in[0,\ T]$, 使

$$H_m(t)>0, \qquad \forall t\in[0,\ T_{\max}] \tag{24.60}$$

如果 $T_{\max}<T$, 则

$$H(T_{\max})=0. \tag{24.61}$$

由(24.60)和(24.55), 可知

$$G_m(t)>0, \qquad t\in[0,\ T_{\max}]$$

因此, 对每个 $t\in[0,\ T_{\max}]$, $L(t)\eta_0^1$、$L(t)\eta_0^2$、$\cdots$、$L(t)\eta_0^m$ 是独立的. 在(24.59)式中, 注意到 $F\subset\mathbb{R}^m$、$\dim F=l$ 和 $t\in[0,\ T_{\max}]$, 且

$$\mathscr{F}=\left\{\sum_{i=1}^m x_i L(t)\eta_0^i,\ \ x\in F\right\}$$

是 H 中的 l 维子空间, 因此

$$\left(\frac{\alpha}{c_0}|w_l(t)|\right)^{\frac{1}{\sigma}} \leqslant \max_{\substack{\mathscr{F}\subset H \\ \dim \mathscr{F}=l}} \min_{\substack{\xi\in\mathscr{F} \\ \xi\neq 0}} \frac{(K\xi,\ \xi)}{|\xi|^2}. \tag{24.62}$$

由于不等式(24.62)的右端为 K 的第 l 个特征值, 因此

$$|w_l(t)|\leqslant c_0\frac{\mathscr{K}_l^\sigma}{\alpha},$$

再由(24.60), 有

$$\frac{dH_m(t)}{dt}\leqslant\frac{c_0}{\alpha}\left(\sum_{l=1}^m \mathscr{K}_l^\sigma\right)H_m(t). \qquad t\in[0,\ T_{\max}] \tag{24.63}$$

对上式积分，可得：

$$H_m(t) \leqslant H_m(0)\exp\left\{\frac{c_0}{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{m}\mathscr{K}_i^q\right)t\right\}. \qquad t\in[0,\ T_{\max}]$$

(24.64)

另一方面，(24.57)的右端有下界，因此 $T_{\max}=T$. 由(24.55)和(24.64)，即得(24.53)．定理证毕.

由定理 2，可看出线性算子 $DS(t)u_0(u_0\in\mathscr{A})$ 在 H^1 空间上的 m 维体积的变化.

设 x 为一在 H^2 中的有界不变集：

$$S(t)x=x. \qquad \forall t\in\mathbf{R} \quad (24.65)$$

定理 3 设 x 为在 H^2 中有界的不变集，则存在一个常数 c_1 和 c_2，使得对每个 $u_0\in x$、$m\geqslant1$ 和 $t\geqslant0$，有

$$\|(DS(t)u_0)v_0^1\wedge\cdots\wedge(DS(t)u_0)v_0^m\|_1$$
$$\leqslant\|v_0^1\wedge\cdots\wedge v_0^m\|_1 c_1^m\exp(c_2\sqrt{m}-\gamma_m)t. \qquad \forall v_0^i\in H^1$$

(24.66)

证明 为方便起见，引入函数

$$w^i(t)=v^i(t)e^{\gamma t}. \qquad (24.67)$$

方程(24.35)简化为

$$w_t+(uw)_x+w_{xxx}=0. \qquad (24.68)$$

(24.68)式乘以乘子 $2w_{xx}+2uw$，得

$$2\int w_t(w_{xx}+uw)dx=0, \qquad (24.69)$$

这是由于 $((uw)_x+w_{xx})(uw+w_{xx})$ 可写成对 x 的微商形式．因此

$$\frac{d}{dt}\int(w_x^2-uw^2)dx=-\int u_t w^2dx. \qquad (24.70)$$

为了作出 $\|w\|_1^2=\int(w^2+L^2w_x^2)$ 的估计，(24.68) 乘以 $2(1+\mu)w$，其中 $\mu(t)$ 为 $t\in[0,\ L]$ 上任意可积函数，得

$$\frac{d}{dt}\int(1+\mu)w^2dx+2(1+\mu)\int[(uw)_x+w_{xxx}]wdx$$
$$=(1+\mu)\frac{d}{dt}\int w^2dx+(1+\mu)\int u_xw^2dx=0. \qquad (24.71)$$

(24.70)乘以 L^2, 并和(24.71)求和, 得:

$$\frac{d}{dt}\{g_\mu(t; w(t))\} = r_\mu(t; w(t)), \tag{24.72}$$

其中

$$g_\mu(t; \eta) = \int\{\eta^2 + L^2\eta_x^2 + (\mu - L^2\mu(t))\eta^2\}dx, \tag{24.73}$$

$$r_\mu(t; \eta) = -\int\{(1+\mu)u_x + L^2u_t)\eta^2\}dx, \tag{24.74}$$

$\eta \in H^1$. 选取 μ, 使得 $g_\mu(t; \cdot)$变为 H^1 的等价模 $\|\cdot\|_1$.

取

$$\mu = \mu(x) = L^2 \sup_{v\in x}|v|_{L^\infty}, \tag{24.75}$$

μ 是有限的. 因为 X 在 H^2 中有界, 由(24.75)有

$$\|\eta\|_1^2 \leqslant g_\mu(t; \eta) \leqslant (1+2\mu)\|\eta\|_1^2, \qquad \forall \eta \in H^1, \ \forall t \in \mathbb{R}^1 \tag{24.76}$$

由(24.1), (24.74)式右端含有 u_t 的积分项为

$$-L^2\int u_t\eta^2\,dx = L^2\int(uu_x + u_{xxx} + \gamma u - f)\eta^2\,dx, \tag{24.77}$$

其中

$$\int u_{xxx}\eta^2\,dx = -\int u_{xx}(\eta^2)_x = -2\int u_{xx}\eta_x\eta\,dx,$$

$$\left|\int u_{xx}\eta_x\eta\,dx\right| \leqslant |u|_2|\eta|_1|\eta|_{L^\infty}$$

$$\leqslant |u|_2|\eta|_0^{\frac{1}{2}}|\eta|_1\left(2|\eta|_1 + \frac{1}{L}|\eta|_0\right)^{\frac{1}{2}}.$$

于是, (24.70)式的右端可估计为

$$|r_\mu(t; \eta)| \leqslant c_3\|\eta\|_1^{\frac{3}{2}}\|\eta\|_0^{\frac{1}{2}}, \tag{24.78}$$

其中 c_3 是一常数, 它依赖于 γ、L、$\|f\|_0$ 和在 H^2 中含有 X 的球的半径.

现利用定理 3 去得到估计(24.66). 取 $H = H^1$, $|\cdot| = \|\cdot\|_1$,

$(\cdot,\ \cdot)=((\cdot,\ \cdot))_1$. 取 $q=q_\mu$, $r=r_\mu$, $L(t)=e^{\gamma t}DS(t)u_0$, $\eta_0^i=u_0^i$. 在(24.50)不等式中，$\alpha=1$, $\beta=1+2\mu$(由不等式(24.76)可看出)，在不等式(24.51)中，$\sigma=\frac{1}{2}$, $c_0=c_3$(由不等式(24.78)看出)，且

$$((K\eta,\ \xi))_1=\int\eta\xi\,dx,\qquad \forall\,\eta、\xi\in H^1 \quad (24.79)$$

其中 $K=\left(1+L^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}$，它是 H^1 上的无界算子 $v\to v+L^2v_{xx}$ 的逆算子，它的特征值为 $\frac{1}{1+4\pi^4\beta^2}$, $\beta\in Z$. 因此

$$\sum_{l=1}^{m}w_l^{\frac{1}{4}}\leqslant\sum_{l=1}^{2m}w_l^{\frac{1}{4}}\leqslant 2\sum_{l=0}^{m}(1+4\pi l^2)^{-\frac{1}{4}}\leqslant c_4\sqrt{m}. \quad (24.80)$$

于是定理 2 的(24.53)为

$$\begin{aligned}&\det((w^i(t),\ w^j(t))_1\\&\leqslant\{(1+2\mu)^m\exp(c_3c_4\sqrt{m}\,t\}\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}(v_0^i,\ v_0^j),\end{aligned} \quad (24.81)$$

其中 $w^i(t)=e^{\gamma t}v^i(t)$. 由(24.81)，即得(24.66)，其中

$$c_1=(1+2\mu)^{\frac{1}{2}},\qquad c_2=c_3c_4/2.$$

由定理 3 易得:

定理 4 问题(24.1)～(24.3)的整体吸引子 $\mathscr{A}$ 在 H^1 上具有有限分形维数和豪斯多夫维数.

§25 具弱阻尼的非线性薛定谔方程的整体吸引子及其豪斯多夫维数的估计

我们考虑如下具阻尼非线性薛定谔方程

$$iu_t+u_{xx}+g(|u|^2)u+i\gamma u=f, \quad (25.1)$$

具初始条件

$$u|_{t=0}=u_0 \quad (25.2)$$

和下列边界条件之一(记为(I))

狄利克雷型:

$$u(0,\ t)=u(L,\ t)=0, \qquad t\in\mathbb{R} \quad (25.3)$$

冯·诺伊曼型:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ t)=\frac{\partial u}{\partial x}(L,\ t)=0, \qquad t\in\mathbb{R} \quad (25.4)$$

周期边界条件:

$$u(x,\ t)=u(x+L,\ t). \qquad \forall x\in\mathbb{R},\ \forall t\in\mathbb{R} \quad (25.5)$$

我们置 $g(u)\in C^{\infty}(u\in[0,\ \infty))$满足下列增长条件

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{G_+(s)}{s^3}=0. \quad (25.6)$$

存在 $\omega>0$, 使

$$\limsup_{s\to+\infty}\frac{h(s)-\omega G(s)}{s^3}\leqslant 0, \quad (25.7)$$

其中

$$h(s)=sg(s), \qquad G(s)=\int_0^s g(\sigma)d\sigma, \quad (25.8)$$

$$G_+(s)=\max(G(s),\ 0), \qquad G_-=\max(-G(s),\ 0).$$

§25.1 对时间 t 的一致先验估计

(a) 某些积分等式

(25.1)乘以 $\bar{u}$, 在$[0,\ L]$上积分, 得:

$$i\int_0^L u_t\bar{u}dx+\int_0^L u_{xx}\bar{u}dx+\int_0^L|u|^2g(|u|^2)dx+i\gamma\int_0^L|u|^2dx$$
$$=\int_0^L f\bar{u}dx. \quad (25.9)$$

设 u 满足边界条件(I), 有:

$$\int_0^L u_{xx}\bar{u}dx=-\int_0^L|u_x|^2dx.$$

(25.9)取虚部和实部, 有:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L|u|^2dx+\gamma\int_0^L|u|^2dx=I_m\int_0^L f\bar{u}dx, \quad (25.10)$$

$$I_m\int_0^L u\bar{u}_t\,dx-\int_0^L|u_x|^2\,dx+\int_0^L h(|u^2|)\,dx=\mathrm{Re}\int_0^L f\bar{u}\,dx,$$

(25.11)

其中 h 满足(25.8). 其次, (25.1)乘以 $\bar{u}_t$, 在$[0, l]$上积分, 取实部, 得:

$$\mathrm{Re}\int_0^L u_{xx}\bar{u}_t\,dx+\mathrm{Re}\int_0^L g(|u|^2)u\bar{u}_t\,dx-\gamma\,\mathrm{Im}\int_0^L u\bar{u}_t\,dx$$

$$=\mathrm{Re}\int_0^L f\,\bar{u}_t\,dx. \tag{25.12}$$

由边界条件(I), 有

$$\int_0^L u_{xx}\,\bar{u}_t\,dx=-\int_0^L u_x\,\bar{u}_{xt}\,dx.$$

从(25.12)有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L\{-|u_x|^2+G(|u|^2)\}dx-\gamma\,\mathrm{Im}\int_0^L u\bar{u}_t\,dx$$

$$=\mathrm{Re}\int_0^L f\,\bar{u}_t\,dx. \tag{25.13}$$

(25.11)乘以γ, 加上(25.13), 得:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L\{|u_x|^2-G(|u|^2)+2\mathrm{Re}(f\bar{u})\}dx$$

$$+\gamma\int_0^L\{|u_x|^2-h(|u|^2)+\mathrm{Re}(f\bar{u})\}dx$$

$$=\mathrm{Re}\int_0^L f_t\,\bar{u}\,dx. \tag{25.14}$$

以$(\cdot,\ \cdot)_0$和$|\cdot|_0$表示$L^2(0,\ L)$的内积和模:

$$(u,\ v)_0=\int_0^L u(x)\bar{v}(x)dx,\qquad |v|_0=\{(v,\ v)_0\}^{\frac{1}{2}}. \tag{25.15}$$

再写(25.10)为

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|_0^2+\gamma|u|_0^2=\mathrm{Im}(f,\ u)_0. \tag{25.16}$$

关于(25.14), 引入两个泛函

$$\varphi(v)=|v_x|^2+2\mathrm{Re}(f,\ v)_0-\int_0^L G(|v|^2)dx, \tag{25.17}$$

$$\psi(v)=|v_x|^2+\mathrm{Re}(f,\ v)_0-\int_0^L h(|v|^2)dx, \qquad (25.18)$$

于是(25.14)可写为

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\varphi(u)+\gamma\psi(u)=\mathrm{Re}(f_t,\ u)_0. \qquad (25.19)$$

(b) 利用 g 的假设得到的不等式

引理 1 在假设(25.6)下，存在仅依赖于 g 和 ε 的常数 C'_ε，使得对任何 v 有

$$\begin{aligned}&|v_x|_0^2-\int_0^L G_+(|v|^2)dx\\ &\qquad\geqslant(1-8\varepsilon|v|_0^4)|v_x|_0^2-\frac{2\varepsilon}{L^2}|v|_0^6-LC'_\varepsilon.\end{aligned} \qquad (25.20)$$

证明 根据(25.6)，对任何 $\varepsilon>0$，存在 $C'_\varepsilon\geqslant0$，使

$$G_+(s)\leqslant\varepsilon s^3+C'_\varepsilon. \qquad \forall s\geqslant0 \quad (25.21)$$

因此

$$|v_x|_0^2-\int_0^L G_+(|v|^2)dx\geqslant|v_x|^2-\varepsilon\int_0^L|v|^6dx-LC'_\varepsilon. \qquad (25.22)$$

由

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant L}|v(x)|^2\leqslant|v|_0\left(2|v|_1+\frac{1}{L}|v|_0\right), \qquad (25.23)$$

有

$$\begin{aligned}\int_0^L|v|^6dx&\leqslant|v|_0^2\sup_{0\leqslant x\leqslant L}|v(x)|^4\\ &\leqslant|v|_0^4\left(8|v_x|_0^2+\frac{2}{L^2}|v|_0^2\right).\end{aligned} \qquad (25.24)$$

由(25.23)和(25.24)即得(25.20)。

引理 2 在假设(25.7)下，对任何 $\varepsilon>0$，存在仅依赖于 g 和 ε 的常数 C''_ε，使得对任何 v 有

$$\begin{aligned}&\int_0^L(h(|v|^2)-\omega G(|v|^2))dx\\ &\qquad\leqslant8\varepsilon|v|_0^4|v_x|_0^2+\frac{2\varepsilon}{L^2}|v|_0^6+LC''_\varepsilon.\end{aligned} \qquad (25.25)$$

证明 由(25.7)，对任何 $\varepsilon>0$，存在常数 $C''_\varepsilon>0$，使

$$h(s)-\omega G(s)\leqslant \varepsilon s^3+C''_\varepsilon, \qquad \forall s\geqslant 0 \quad (25.26)$$

取 $s=|v|^2$，上式在 $[0, L]$ 上积分，利用(25.21)，即得(25.25)。

(c) 先验估计

由(25.10)可知，如 $f\in L^\infty(\mathbb{R}_+; L_2(0, L))$，$u_0\in L_2(0, L)$，则 $u\in L^\infty(\mathbb{R}_+; L_2(0, L))$。令

$$|f|_{0,\infty}=\operatorname*{ess\,sup}_{t\geqslant 0}|f(t)|_0, \tag{25.27}$$

由柯西-许瓦兹不等式，有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|_0^2+\gamma|u|_0^2\leqslant\frac{\gamma}{2}|u|_0^2+\frac{|f|_{0,\infty}^2}{2\gamma}.$$

因此

$$\frac{d}{dt}|u|_0^2+\gamma|u|_0^2\leqslant\frac{|f|_{0,\infty}^2}{\gamma}. \tag{25.28}$$

上式对 t 积分，得：

$$|u(t)|_0^2\leqslant|u(0)|_0^2\exp(-\gamma t)+\frac{|f|_{0,\infty}^2}{\gamma^2}(1-e^{-\gamma t}). \tag{25.29}$$

由(25.20)，当 ε 充分小时，可知 $\varphi(u)$ 是强制的。由此可得 $u\in L^\infty(\mathbb{R}_+, H^1(0, L))$ 的估计。

命题 1 设 u 为问题(25.1)、(25.2)具边界条件(I)的正则解。在假设(25.6)、(25.7)下，存在常数 φ_∞，使

$$\varphi(u(t))\leqslant\varphi(u(0))e^{-\gamma\omega t}+\varphi_\infty(1-e^{-\gamma\omega t}). \qquad \forall t\geqslant 0 \tag{25.30}$$

取

$$e_\infty^2=\sup_{t\geqslant 0}|u(t)|_0^2\leqslant\max\left(|u(0)|_0^2, \frac{|f|_{0,\infty}^2}{\gamma^2}\right), \tag{25.31}$$

$$\varepsilon_0=\frac{\omega}{32+10\omega}e_\infty^{-4}, \tag{25.32}$$

则有

$$\varphi(u(t))\geqslant\frac{1}{4}|u_x|_0^2-\frac{2\varepsilon_0}{L^2}e_\infty^6-LC'_\varepsilon-2|f|_{0,\infty}e_\infty. \tag{25.33}$$

由(25.17)、(25.18)和(25.25)，可得：

$$\omega\varphi(v)-\psi(v)\leqslant(\omega-1)|v_x|_0^2+2\omega\operatorname{Re}(f,v)_0-\operatorname{Re}(f,v)_0$$
$$+8\varepsilon|v|_0^4|v_x|_0^2+\frac{2\varepsilon}{L}|v|_0^6+LC_*''. \qquad (25.34)$$

由(25.31)、柯西-许瓦兹不等式和 $0<\omega\leqslant1$，可得：

$$\omega\varphi(u)-\psi(u)\leqslant3|f|_{0,\infty}e_\infty+8\varepsilon e_\infty^4|u_x|_0^2$$
$$+\frac{2\varepsilon}{L^2}C_\infty^6+LC_*''.\quad \forall t\geqslant0 \qquad (25.35)$$

写(25.19)为

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\varphi(u)+\gamma\omega\varphi(u)=\gamma(\omega\varphi(u)-\psi(u))+\operatorname{Re}(f_t,u)_0. \qquad (25.36)$$

先估计 $\operatorname{Re}(f_t,u)_0$，

$$|\operatorname{Re}(f_t,u)_0|\leqslant|f_t|_0|u|_0\leqslant|f_t|_{0,\infty}(|u|_0^2+L^2|u_x|_0^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$|\operatorname{Re}(f_t,u)_0|\leqslant|f_t|_{0,\infty}e_\infty+\frac{\omega\gamma}{4}|u_x|_0^2+\frac{L^2|f_t|_{0,\infty}^2}{\omega\gamma}. \qquad (25.37)$$

由(25.17)和(25.20)可得

$$\varphi(u)\geqslant(1-8\varepsilon|u|_0^4)|u_x|_0^2-\frac{2\varepsilon}{L^2}|u|_0^6-LC_*'+2\operatorname{Re}(f,u)_0. \qquad (25.38)$$

由(25.31)和(25.35)可得($0<\omega\leqslant1$)

$$\omega\varphi(u)-\psi(u)+\frac{\omega}{4}|u_x|_0^2$$
$$\leqslant\frac{\omega}{2}\varphi(u)+\frac{3\varepsilon_0e_\infty^6}{L^2}+4|f|_{0,\infty}e_\infty+L(C_*'+C_*''). \qquad (25.39)$$

其中 ε_0 满足

$$\frac{\omega}{4}-8\left(1+\frac{\omega}{2}\right)\varepsilon_0e_\infty^4=0. \qquad (25.40)$$

对此 ε_0，由(25.38)推出(25.33)．由(25.36)、(25.37)和(25.39)，可得：

$$\frac{d\varphi(u)}{dt}+\gamma\omega\varphi(u)\leqslant\frac{6s_0c_\infty^8\gamma}{L^2}+(8\gamma|f|_{0,\infty}+2|f_t|_{0,\infty})\theta_\infty$$

$$+\frac{2L^2}{\omega\gamma}|f_t|_{0,\infty}^2+2L\gamma(c'_{\varepsilon_0}+c''_{\varepsilon_0}).$$

(25.41)

由此推出(25.30)，其中

$$\varphi_\infty=\frac{1}{\gamma\omega}\text{ 乘以(23.41)的右端.} \qquad (25.42)$$

§ 25.2 转换为算子的柯西问题

(a) 泛函形式

我们引入希尔伯特空间 $H=L_2(0, L)$. 在 L_2 上的无界线性算子 A 为

$$Av=-v_{xx}, \qquad (25.43)$$

具有定义域 $D(A)=$

$$\begin{cases} H^2(0, L)\cap H_0^1(0, L), & \text{对应于边界条件(15.3);} \\ \{v\in H^2(0, L),\ v_x(0)=v_x(L)=0\}, & \text{对应于边界条件(25.4);} \\ \{v\in H_{loc}^2(\mathbb{R}), v(x+L)=v(x), \forall x\in\mathbb{R}\}, & \text{对应于边界条件(25.5).} \end{cases}$$

对于每个 $\gamma>0$, 算子 $A+\gamma$ 从 $D(A)$ 到 H 是一同构. 因 $D(A)$ 到 H 的嵌入是紧的，因此 $(A+\gamma)^{-1}$ 是 H 上的紧算子. 它是自共轭的，因此，存在由 A 的特征向量组成的希尔伯特空间的一组基. 设 $\{\lambda_j\}_{j=0}^\infty$ 为特征值的非减序列，

$$0\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_j\to+\infty, \qquad j\to\infty$$

相应的规范特征向量为 $\{w_j\}_{j=0}^\infty$.

A^s 表示幂算子 $(s\in\mathbb{R})$, 具有定义域 $D(A^s)$. 例如，$V=D(A^{\frac{1}{2}})$ 对应上述边界条件为

$$V=\begin{cases} H_0^1(0, L), & \text{边界条件(25.3);} \\ H^1(0, L), & \text{边界条件(25.4);} \\ \{v\in H_{loc}^1(\mathbb{R}),\ v(x+L)=v(x), \forall x\in\mathbb{R}\}, & \text{边界条件(25.5),} \end{cases}$$

而 $V'=D(A^{-\frac{1}{2}})$ 为 V 的对偶空间.

(b) 柯西问题的泛函形式

设 f 给定，使得：

$$f\in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R},\ H),\qquad f_t\in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R},\ V'). \tag{25.45}$$

我们要寻求函数

$$u\in C(\mathbb{R},\ V), \tag{25.46}$$

使之满足

$$iu_t-Au+g(|u|^2)u+i\gamma u=f, \tag{25.47}$$

$$u(0)=u_0, \tag{25.48}$$

其中满足方程(25.47)是在分布意义上的，其值在 V' 上，$V_0\in V$ 为给定元素.

(c) 解的存在性和唯一性

从西格尔(I. E. Segal)的理论可知，柯西问题(25.46)～(25.48)存在唯一解 $u(t)\in[0,T_*]$，其中 $T_*=+\infty$ 或 $\limsup\limits_{t\to T^*}|u(t)|=+\infty$ 由命题1. 后一种情况是不会发生的. 实际上，我们有

定理 1 设 g 满足(25.6)、(25.7)，对于 $u_0\in V$，f 满足(25.45)，则问题(25.46)～(25.48)具有唯一解，对 $t\in\mathbb{R}$，映射：$u_0\to u(t)$ 在 V 上是连续的.

更进一步，如果

$$f\in L^{\infty}(\mathbb{R}_+,\ H),\qquad f_t\in L^{\infty}(\mathbb{R}_+,\ V'),$$

则有：

$$u\in L^{\infty}(\mathbb{R}_+;V). \tag{25.49}$$

我们将用对时间的一致性估计，证明定理的后半部分. 现叙述一下定理的前半部分的证明. 这些古典结果可用 J. L. Lions 的方法得到. 首先，用伽辽金方法构造问题(25.46)～(25.48)的有限维近似解. 取基函数为 $\{w_i\}_{i=0}^{m}$，其中 $m=0,1,\cdots$. 相应的近似解设为 $\{u_m(t)\}_{m\in\mathbb{N}}$. (25.16)、(25.19)对 $u_m(t)$ 仍成立. 因此我们得到 $\{u_m(t)\}$ 的 H^1 模与 m 无关的估计，其中，由于 $f_t\in L^{\infty}(R,\ V')$，不等式(25.37)应换为

$$|\mathrm{Re}\langle f_t,\ u\rangle|\leqslant|f_t|_*\cdot(|u|_0^2+L^2|u_x|_0^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{25.50}$$

其中$\langle\,,\,\rangle$表V和V'之间的配对；$|\cdot|_*$表示V'的模

$$|V|_V=(|V|_0^2+L^2|v_x|_0^2)^{\frac{1}{2}} \tag{25.51}$$

的对偶模．令$m\to\infty$，利用标准的技巧，可知$u\in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+,V)$．利用$t\to-t$，问题(25.46)～(25.48)可同样讨论．我们可以得到问题(25.46)～(25.48)的解$u\in L^\infty_{loc}(\mathbb{R},V)$．且$u(\cdot,t)$是从$\mathbb{R}$到$V$的弱连续函数．它的强连续性可以由靴带技巧得到．即将(25.47)看作线性方程

$$iu_t-Au=\tilde{f}=f-i\gamma u-g(|u|^2)u,$$

由提高$\tilde{f}$的光滑性而得到．最后，我们证明解的唯一性和连续依赖性．设u_1、u_2分别为(25.46)—(25.48)的两个解．令$w=u_1-u_2$，则w满足

$$iw_t-Aw+i\gamma w=g(|u_2|^2)u_2-g(|u_1|^2)u_1. \tag{25.52}$$

因$u_t\in c(\mathbb{R},V)$，$iw_t-Aw\in L^\infty_{loc}(\mathbb{R},V)$．因$w\in L^\infty_{loc}(\mathbb{R},V)$，类似前面估计，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w_x|_0^2=\operatorname{Im}\langle iw_t-Aw,\ Aw\rangle, \tag{25.53}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|_0^2=\operatorname{Im}\langle iw_t-Aw,\ w\rangle. \tag{25.54}$$

则由(25.52)、(25.53)、(25.54)和标准的格隆沃尔不等式，可得到$|w|_V$的估计．它是唯一的，因为$w(0)=0$．

§25.3 H^1模有界吸收集的存在性

设

$$f\in L^\infty(\mathbb{R}_+;H),\qquad f_t\in L^\infty(\mathbb{R}_+;V'). \tag{25.55}$$

依(25.29)、(25.30)、(25.33)可知，定理1的解$u(x,t)\in L^\infty(\mathbb{R}^+;V)$．我们有：

命题2 设条件(25.6)、(25.7)成立，则存在常数$\rho_{\infty,1}$，使得对任何$R>0$和$v_0\in V$，满足：

$$|u_0|_0^2+L^2|u_{0x}|_0^2\leqslant R^2 \tag{25.56}$$

时，存在 $T_1(R)>0$，使得问题(25.46)～(25.48)的解满足

$$|u(t)|_0^2+L^2|u_x|_0^2\leqslant(\rho_{\infty,1})^2,\quad \forall t\geqslant T_1(R) \tag{25.57}$$

证明 从(25.29)和(25.16)有

$$|u(t)|_0^2\leqslant R^2e^{-\gamma t}+\frac{|f|_{0,\infty}^2}{\gamma^2}(1-e^{-\gamma t}),$$

因此

$$|u(t)|_0^2\leqslant\frac{2|f|_{0,\infty}^2}{\gamma^2},\qquad t\geqslant T_0(R) \tag{25.58}$$

其中 $T_0(R)=\dfrac{2}{\gamma}\log\left(\dfrac{|f|_{0,\infty}}{\gamma R}\right)$. 我们仅考虑 $t\geqslant T_0(R)$ 的情况. 在(25.35)中，以 $\dfrac{2|f|_{0,\infty}^2}{\gamma^2}$ 代替 e_∞^2. 类似于(25.40)，选取 ε_1 如下:

$$\frac{\omega}{4}-8\left(1+\frac{\omega}{2}\right)\varepsilon_1\frac{4|f|_{0,\infty}^4}{\gamma^4}=0, \tag{25.59}$$

其中 ε_1 不依赖于 R. 以估计式(25.50)代替(25.37)，我们有

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi(t)}{dt}+\gamma\omega\varphi(t)\leqslant&\frac{48\varepsilon_1|f|_{0,\infty}^2}{\gamma^3L^2}+16|f|_{0,\infty}^2+\frac{4|f|_{0,\infty}}{\gamma}|f_t|_{*,\infty}\\&+\frac{2L^2|f_t|_{*,\infty}^2}{\gamma\omega}+2L\gamma(C'_{\varepsilon_1}+C''_{\varepsilon_1})\\=&\tilde{\varphi}_\infty,\end{aligned} \tag{25.60}$$

其中

$$|f_t|_{*,\infty}^2=\operatorname*{ess\,sup}_{t>0}|f_t(t)|_*. \tag{25.61}$$

从(6.52)，当 $t\geqslant T_0(R)$ 时有

$$\varphi(u(t))\leqslant\varphi(u(T_0(R)))e^{-\gamma(t-T_0(R))}+\frac{\tilde{\varphi}_\infty}{\gamma\omega}. \tag{25.62}$$

选取 $T(R)\geqslant T_0(R)$，使

$$\varphi(u(T_0(R)))e^{-\gamma\omega(T(R)-T_0(R))}\leqslant\frac{\tilde{\varphi}_\infty}{\gamma\omega}, \tag{25.63}$$

其中 u_0 满足(25.56). (25.63)是成立的，因 $\varphi(u_0(T(R)))$ 的上界仅依赖于 R 和 u_0. 由(25.62)、(25.63)有

$$\varphi(u(t))\leqslant\frac{2\tilde{\varphi}_\infty}{\gamma\omega},\qquad t\geqslant T(R) \tag{25.64}$$

由(25.33)，当 $t\geqslant T(R)\geqslant T_0(R)$ 时成立；且由 ε_1 代替 ρ_0，$\frac{2|f|_{0,\infty}^2}{\gamma^2}$ 代替 e_∞，则由(25.56)有

$$|u_x|_0^2\leqslant\frac{8\tilde{\varphi}_\infty}{\gamma\omega}+\frac{64}{\gamma^6}|f|_{0,\infty}^6+4LC'_{\varepsilon_1}+\frac{8\sqrt{2}|f|_{0,\infty}^2}{\gamma}=K. \tag{25.65}$$

联合(25.58)和(25.65)，可得(25.57)，其中

$$\rho_{\infty,1}^2=\frac{2|f|_{0,\infty}^2}{\nu^2}+L^2K.$$

§25.4 H^2 模上有界吸收集的存在性

现加强对 f、f_t 的假设. 设

$$f\in L_{loc}^\infty(\mathbb{R},\ H),\qquad f_t\in L_{loc}^\infty(\mathbb{R},\ H),\tag{25.66}$$

且设 $u_0\in D(A)$，则在定理 1 中所得到的解满足

$$u\in L_{loc}^\infty(\mathbb{R},\ D(A)),\qquad u_t\in L_{loc}^\infty(\mathbb{R},\ H),\tag{25.67}$$

且映射 $u_0\to u(t)$ 在 $D(A)$ 中连续. 事实上，令 $\eta=u_t$，(25.47)对 t 微商，可得：

$$i\eta_t-A\eta+\{g(|u|^2)+g'(|u|^2)|u|^2\}\eta+g'(|u|^2)u^2\bar{\eta}+i\gamma\eta$$
$$=f_t.\tag{25.68}$$

依(25.47)，有

$$\eta(0)=u_t(0)=-iAu_0+ig(|u_0|^2)u_0-\gamma u_0-if(0)\in H,\tag{25.69}$$

其中 $u_0\in D(A)$，$f\in c(\mathbb{R},\ H)$. (25.68)和 η 作内积，取虚部，可得：

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\eta|_0^2+\gamma|\eta|_0^2+\mathrm{Im}(g'(|u|^2)u^2,\ \eta^2)_0$$
$$=\mathrm{Im}(f_t,\ \eta)_0.\tag{25.70}$$

由于

$$\sup_{\substack{0\leqslant x\leqslant l\\ t\leqslant T}}|u(x,\ t)|<\infty,\tag{25.71}$$

由(25.66)、(25.69)、(25.70)和格隆沃尔不等式，可得

$$u_t=\eta\in L^\infty_{loc}(\mathbb{R},\ H). \tag{25.72}$$

由(25.47)，有

$$Au=iu_t+g(|u|^2)u+i\gamma u-f. \tag{25.73}$$

由(25.66)、(25.72)和 $u\in L^\infty_{loc}(\mathbb{R},V)$，可得(25.67)．映射 $u_0\to u(t)$ 在 $D(A)$ 中的连续性的证明类似于定理 1.

如果

$$f\in L^\infty(\mathbb{R}_+;\ H),\qquad f_t\in L^\infty(\mathbb{R}_+,\ H), \tag{25.74}$$

我们有

命题 3 设 g 满足(25.6)、(25.7)，且(25.74)成立，则存在常数 $\rho_{\infty,2}$，使得对任何 $R>0$ 和 $u_0\in D(A)$，满足

$$|u_0|_0^2+L^2|u_{0x}|_0^2+L^4|u_{0xx}|_0^2\leqslant R^2 \tag{25.75}$$

时，存在 $T_2(R)$，使(25.46)～(25.48)的解满足

$$|u(t)|_0^2+L^2|u_x|_0^2+L^4|u_{xx}|_0^2\leqslant(\rho_{\infty,2})^2. \qquad \forall t\geqslant T_2 \tag{25.76}$$

证明 设(25.57)成立．现对充分大的 t，估计 $|u_{xx}|_0^2$.

(25.47)与 $Au_t+\gamma Au$ 作内积，取实部，得：

$$-\operatorname{Re}(Au,\ Au_t+\gamma Au)_0+\operatorname{Re}(g(|u|^2)u-f,\ Au_t+\gamma Au)_0=0. \tag{25.77}$$

因 $g(|u|^2)u\in V$，

$$\operatorname{Re}(g(|u|^2u,\ Au))_0=\int_0^L\{g(|u|^2)|u_x|^2+g'(|u|^2)\operatorname{Re}(|u_x|^2\bar u+u\bar u_x^2)\}\,dx. \tag{25.78}$$

利用 u 的 L_∞ 估计和 $|u_x|^2$ 的 L_1 估计，可得

$$|\operatorname{Re}(g(|u|^2)u,\ Au)|_0\leqslant\rho'_{\infty,1},\qquad t\geqslant T_1(R) \tag{25.79}$$

其中 $\rho'_{\infty,1}$ 仅依赖于 $\rho_{\infty,1}$.

余下来估计

$$\operatorname{Re}(g(|u|^2u,\ Au_t))=\operatorname{Re}\int_0^L(g(|u|^2)u)_x\bar u_{xt}\,dx. \tag{25.80}$$

上式等于

$$\int_0^L g(|u|^2)\operatorname{Re}(u_x\bar{u}_{xt})+\int_0^L g'(|u|^2)\operatorname{Re}(u\bar{u}_x)\operatorname{Re}(u\bar{u}_{xt})dx.$$

可以写为

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L\{g(|u|^2)|u_x|^2+2g'(|u|^2)\operatorname{Re}(u\bar{u}_x)^2\}dx-R(u),\tag{25.81}$$

其中

$$R(u)=\int_0^L g'(|u|^2)(|u_x|^2\operatorname{Re}(u\bar{u}_t)+2\operatorname{Re}(u\bar{u}_x)\operatorname{Re}(u_t\bar{u}_x))$$
$$+2g''(|u|^2)\operatorname{Re}(u\bar{u}_t)\operatorname{Re}(u\bar{u}_x)^2\}dx.\tag{25.82}$$

由(25.47)，有

$$u_t=-iAu+h.\tag{25.83}$$

由(25.57)，有

$$|h(t)|_0\leqslant\rho_{\infty,1}^{(2)}.\qquad t\geqslant T_1(R)\tag{25.84}$$

将(25.83)代入(25.82)，再用 u 的 L^∞ 估计和(25.57)，可得：

$$|R(u)|\leqslant\rho_{\infty,1}^{(3)}\left\{\int_0^L|u_x|^2|Au|dx+\int_0^L|u_x|^2|h|dx\right\}.\tag{25.85}$$

利用不等式

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant L}|u_x(x,t)|^2\leqslant|u_x(t)|_0\left(2|Au|_0+\frac{1}{L}|u_x(t)|_0\right),\tag{25.86}$$

则有

$$|R(u)|\leqslant\rho_{\infty,1}^{(3)}|u_x|_{L^\infty}|u_x|_0(|Au|_0+|h|_0).$$

由(25.84)和(25.86)，可得对 $t\geqslant T_1(R)$有

$$|R(u)|\leqslant\rho_{\infty,1}^{(4)}(1+|Au|_0^{\frac{3}{2}}).\tag{25.87}$$

再回到(25.77)，有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\varphi_1(u)+\gamma\psi_1(u)$$
$$\leqslant\rho_{\infty,1}^{1}+(f_t,\ Au)_0+\rho_{\infty,1}^{(4)}(1+|Au|_0^{\frac{3}{2}}),\qquad t\geqslant T_1(R)\tag{25.88}$$

其中

$$\varphi_1(u)=|Au|_0^2+2(f,\ Au)_0-\int_0^L\{g(|u|^2)|u_x|^2$$
$$+2g'(|u|^2)\mathrm{Re}(u\bar{u}_x)^2\}dx,$$
$$(25.89)$$

$$\psi_1(u)=|Au|_0^2+(f,\ Au)_0. \tag{25.90}$$

由(25.57)和柯西-许瓦兹不等式，有

$$|Au|_0^2\leqslant 2\varphi_1(u)+4|f|_{0,\infty}^2+\rho_{\infty,1}^{(5)}, \tag{25.91}$$

$$\varphi_1(u)-\psi_1(u)\leqslant|f|_{0,\infty}|Au|_0+\rho_{\infty,1}^{(6)}. \tag{25.92}$$

由(25.88)，可得

$$\frac{d}{dt}\varphi_1(u)+\gamma\varphi_1(u)\leqslant\frac{\gamma}{2}\varphi_1(u)+\rho_{\infty,1}^{(7)}, \tag{25.93}$$

其中我们用到了如下的 Young 不等式

$$(|f_t|_{0,\infty}+\gamma|f|_{0,\infty})|Au|_0\leqslant\frac{\gamma}{4}|Au|_0^2+\rho_{\infty,1}^{(8)},$$

$$\rho_{\infty,1}^{(4)}|Au|_0^{\frac{3}{2}}\leqslant\frac{\gamma}{4}|Au|_0^2+\rho_{\infty,1}^{(4)}.$$

从(25.93)可得估计

$$\varphi_1(u(t))\leqslant\varphi_1(u(T_1(R))\exp\Big(-\frac{\gamma}{2}(t-T_1(R))\Big)+\frac{2}{\gamma}\rho_{\infty,1}^{(7)}.$$
$$(25.94)$$

因此，当 $t\geqslant T_2(R)$ 时，

$$\varphi_1(u(t))\leqslant\frac{4}{\gamma}\rho_{\infty,1}^{(7)}. \tag{25.95}$$

由(25.91)、(25.95)和(25.57)，可得估计(25.75)。

§25.5 非线性半群和长时间行为

设 $f\in H$, $f(t)\equiv f, \forall t\in\mathbb{R}$. 由定理1，问题(25.47)、(25.48)具有唯一解. 令

$$S(t)u_0=u(t), \qquad t\in\mathbb{R} \tag{25.96}$$

由此可知 $S(t)$ 形成半群，且在 $D(A)$ 中连续；并由命题2和命题3，

有

推论 1 集合

$$B_1=\{u\in v,\ |v|_0^2+L^2|v_x|_0^2\leqslant(\rho_{\infty,1})^2\}\tag{25.97}$$

是关于 $S(t)$ 在 V 上的有界吸收集；

$$B_2=\{v\in D(A),\ |v|_0^2+L^2|v_x|_0^2+L^4|v_{xx}|_0^2\leqslant(\rho_{\infty,2})^2\}\tag{25.98}$$

是关于 $S(t)$ 在 $D(A)$ 上的有界吸收集.

命题 4 集合

$$\omega(B_2)=\bigcap_{s\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant s}S(t)B_2}\tag{25.99}$$

为含在 B_2 内，非空的 $S(t)$ 的不变集，即

$$S(t)\omega(B_2)=\omega(B_2),\qquad \forall t\in\mathbb{R}\tag{25.100}$$

其中闭包表示在 $D(A)$ 的弱拓扑意义下取得的.

证明 由以下事实

(i) $S(t)$ 在 $D(A)$ 上弱连续, (25.101)

(ii) 点 $b\in\omega(B_2)$，仅当存在两个序列 $t_n\in\mathbb{R}$、$b_n\in B_2$，使得 $t_n\to\infty$ 和 $n\to\infty$ 时 $S(t_n)b_n$ 在 $D(A)$ 上弱收敛 (25.102)

即得命题的证明.

先证(25.101). 即要证：如序列 v_n 在 $D(A)$ 中弱收敛于 v，则 $S(t)v_n$ 也在 $D(A)$ 上弱收敛于 $S(t)v$. 由 $D(A)$ 到 V 是紧的，可知 v_n 在 V 中强收敛于 v. 因此 $S(t)$ 在 V 上是连续的，因此 $S(t)v_n$ 在 V 上强收敛于 $S(t)v$. 另一方面，v_n 在 $D(A)$ 中有界，因此 $S(t)v_n$ 也在 $D(A)$ 中有界. 我们选取子序列 $S(t)v_n$ 在 $D(A)$ 中弱收敛于某个 ω. 因 $S(t)v_r$ 在 V 上强收敛于 w，因此 $w=S(t)v$. 这就表明 $S(t)v_n$ 一切序列均在 $D(A)$ 上弱收敛于 $S(t)v$. 由于 B_2 为吸收集，令 d^w 表示在 $D(A)$ 上的距离，则易证明存在 $w\in D(A)$，当 $n\to\infty$ 时 $d^w(s(t_n)b_n,\ w)\to 0$，因而(25.102)得证.

设 B_2 为 $D(A)$ 上的有界吸收集，则 $\omega(B_2)$ 是最大的吸引子. 我们有：

定理 2 集合

$$\mathscr{A}=\omega(B_2) \tag{25.103}$$

满足

$\mathscr{A}$ 是有界的，且在 $D(A)$ 上是弱闭的，　(25.104)

$$S(t)\mathscr{A}=\mathscr{A}, \qquad \forall t\in\mathbb{R} \tag{25.105}$$

$\forall$ 有界集 $B\in D(A)$，有

$$\lim_{t\to\infty} d^w(S(t)B,\ \mathscr{A})=0. \tag{25.106}$$

$\mathscr{A}$ 是在包含意义下满足(25.104)—(25.106)的最大的集合，它在 $D(A)$ 的弱拓扑下是连通的。

证明 性质(25.104)、(25.105)来自命题 4. 为证明(25.106)，用反证法. 设存在两个序列 $t_n\in\mathbb{R}$ 和 $b_n\in B$，$S(t_n)b_n\in B_2$，使得 $t_n\to\infty$ 时有

$$d^w(S(t_n)b_n,\ \mathscr{A})\geqslant\varepsilon_0>0, \tag{25.107}$$

其中 ε_0 与 n 无关. 因 $S(t_n)b_n$ 在 $D(A)$ 中有界，故存在 $b\in B_2$，使得

$$d^w(S(t_n)b_n,\ b)\to 0. \qquad n\to\infty$$

令 $S(t_n)b_n=S\left(\frac{t_n}{2}\right)\left(S\left(\frac{t_n}{2}\right)b_n\right)$ 由(25.102)知 $b\in w(B_2)=\mathscr{A}$. 它和(25.107)矛盾. 定理中关于最大集合的断言是清楚的，连通性来自 B_2 是连通的(它是凸的)，在弱拓扑下是紧的，以及下面的抽象结果.

引理 3 设$(\mathscr{E},d)$为一度量空间，$\mathscr{F}$ 为一非空紧的连通集. 令 $(\Sigma(t))_{t\geq0}$ 表示在$\mathscr{E}$上的半群，满足

(i) 对任何 $t\in\mathbb{R}_+$，$\Sigma(t)$在 $\mathscr{E}$ 上是连续的，

(ii) 对任何 $e\in\mathscr{E}$，$t\to\Sigma(t)e$ 是连续的：$\mathbb{R}_+\to\varepsilon$，

(iii) 存在紧集 K 和 $t_0\in\mathbb{R}_+$ 使得

$$\Sigma(t)\mathscr{F}\subset K, \qquad \forall t\geqslant t_0$$

则 $\mathscr{F}$ 关于 $\Sigma(t)$的 ω 极限集

$$\omega(\mathscr{F})=\bigcap_{s\geq0}\overline{\bigcup_{t\geq s}\Sigma(t)\mathscr{F}}$$

是连通的、紧的非空集合.

应用引理于 $\varepsilon=B_2$, $d=d^w$, $\Sigma(t)=S(t)$, $\mathscr{F}=K=B_2$, $t_0=T_2(B_2)$, 条件(i)、(ii)、(iii)易知满足. 如性质(i)来自(25.101).

由于 $D(A)$紧嵌入于 $D(A^s)$, $s<1$, 和 $D(A^s)$ 到 $H^{2s}(0, L)$ 的连续嵌入, 我们知道 $D(A)$是紧嵌入于 $H^{2s}(0, L)$, $s<1$, 这就推出在(25.104)中的收敛性. $\left(\text{在 } H^{2s}(0, L)\text{中, 取 } s=\frac{1}{2}.\right)$

推论 2 对于有界集 $B\in D(A)$, 集合 $S(t)B$ 依 V 模强收敛于 $\mathscr{A}$.

设集合 B_1 是 V 中的有界吸收集, 令

$$\mathscr{A}^*=\bigcap_{s>0}\overline{\bigcup_{t\geqslant s}S(t)B_1}, \tag{25.108}$$

其中闭包取为 V 的弱拓扑, 我们有

命题 5 对任何 $t\in\mathbb{R}_+$, 映射 $S(t)$在 V 的有界集上关于 H 模拓扑是连续的.

证明 由(25.52)、(25.54), 有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|_0^2+\gamma|w|_0^2$$
$$=\mathrm{Im}\int_0^L(g(|u_2|^2)u_2-g(|u_1|^2)u_1)(\bar{u}_2-\bar{u}_1)dx, \tag{25.109}$$

其中 $u_i=S(t)u_{0i}$, $w=u_2-u_1$, 当 u_{01} 和 u_{02} 在 V 的确定有界集中, 即 $|u_{0i}|_1\leqslant R$, 我们知道对一切 T, $0<T<\infty$,

$$\sup|u_i(x, t)| \qquad (i=1, 2)$$

是有限的, 其中上确界 sup 是对 $x\in[0, L]$, $|t|\leqslant T$, $|u_{0i}|\leqslant R$ 取的. 因此存在常数 $c(T, R)$, 使(25.109)右端囿于 $c(T,R)|w|^2$. 由格隆沃尔不等式即得命题的结论.

推论 3 依(25.108)定义的 $\mathscr{A}^*$, 是在 V 中关于 $S(t)$的最大吸引子.

因 $\mathscr{A}$ 在 $D(A)$中有界, 因而在 V 中也是有界的. 由于 $\mathscr{A}$ 的不变性, 有

$$\mathscr{A}\subset\mathscr{A}^*. \tag{25.110}$$

反之，若 $\mathscr{A}^*$ 在 $D(A)$ 中有界，则有 $\mathscr{A}^*\subset\mathscr{A}$，因而

$$\mathscr{A}=\mathscr{A}^*.$$

§ 25.6 不变集合的维数

本小节我们将证明 $D(A)$ 上的整体吸引子 $\mathscr{A}$ 具有有限的 fractal 维数. 首先证明半群 $S(t)$ 的微商在 V 上的 m 维体积是压缩的. 这里采用的不是古典意义下的模，而是用一种等价模，便于对多种先验估计得到的模进行估计.

设 $u_0\in V$, $v(t)$ 为线性方程初值问题

$$iv_t-Av+[g(|u|^2)+|u|^2g'(|u|^2)]v$$
$$+g'(|u|^2)u^2\bar{v}+i\gamma v=0, \tag{25.111}$$
$$v(0)=v_0 \tag{25.112}$$

的解，其中 $u(t)=S(t)u_0$. 我们已知 $u\in c(\mathbb{R}, V)$. 容易证明问题(25.111)、(25.112)具有唯一解:

$$v\in c(\mathbb{R}, V). \tag{25.113}$$

方程(25.111)为方程(25.47)的变分方程. 把(25.47)看做 u 的实部和虚部的方程组. 映射 $DS(t)u_0$ 定义为

$$(DS(t)u_0)v_0=v(t), \tag{25.114}$$

即为 $S(t)$ 在 u_0 处的微分，利用古典的方法，可证明 $S(t)$ 在 u_0 处可微.

命题 6 设 R、R_1 和 T 是三个正常数. 存在常数 $c=c(R, R_1, T)$，使得任何 u_0、v_0、t，当 $|u_0|_V\leqslant R_1$, $|v_0|_V\leqslant R$, $|t|\leqslant T$ 时，有

$$|s(t)(u_0+v_0)-s(t)u_0-(Ds(t)u_0)v_0|_V\leqslant c|v_0|_V^2. \tag{25.115}$$

令

$$w(x, t)=v(x, t)e^{\gamma t}, \tag{25.116}$$

其中 $v(x, t)$ 为问题(25.111)、(25.112)的解. 我们有

$$iw_t-Aw+(g(|u|^2)+g'(|u|^2)|u|^2)w+g'(|u|^2)u^2w=0, \tag{25.117}$$

$$w(0)=v_0. \tag{25.118}$$

$\overline{w}_t$ 与(25.117)作内积, 取实部, 可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w_x|_0^2-\mathrm{Re}\int_0^L\{g(|u|^2)w\overline{w}_t$$

$$+2g'(|u|^2)\mathrm{Re}(u\overline{w})u\overline{w}_t\}dx$$

$$=0. \tag{25.119}$$

令

$$\Phi(t,\ w)=\int_0^L\{|w_x|^2-g(|u|^2)|w|^2-2g'(|u|^2)\mathrm{Re}(u\overline{w})\}dx, \tag{25.120}$$

于是(25.119)可看作

$$\frac{d}{dt}\Phi(t,\ w)=V(t,w), \tag{25.121}$$

其中

$$V(t,\ w)=-\int_0^L\left\{|w|^2\frac{\partial}{\partial t}\{g(|u|^2)\}\right.$$

$$+2\mathrm{Re}(u\overline{w})^2\frac{\partial}{\partial t}\{g'(|u|^2)\}$$

$$\left.+4g'(|u|^2)\mathrm{Re}(u\overline{w})\mathrm{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial t}w\right)\right\}dx. \tag{25.122}$$

另一方面, 和(25.117)作内积, 取虚部, 可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|_0^2+2\int_0^L g'(|u|^2)\mathrm{Re}(u\overline{w})\mathrm{Im}(u\overline{w})dx=0. \tag{25.123}$$

置 $\mu\in\mathbb{R}$, 令

$$g_\mu(t,\ w)=\Phi(t,\ w)+\mu|w|_0^2, \tag{25.124}$$

$$V_\mu(t,\ w)=V(t,w)-4\mu\int_0^L g'(|u|^2)$$

$$\cdot\mathrm{Re}(u\overline{w})\mathrm{Im}(u\overline{w})dx, \tag{25.125}$$

则由(25.121)和(25.123)可得

$$\frac{d}{dt}\{q_\mu(t, w(t))\} = V_\mu(t, w(t)), \ \forall \mu \in \mathbb{R} \quad (25.126)$$

现取 μ 为

$$\mu = \mu(x) = \frac{1}{L^2} + \sup_{0 \leq \sigma \leq x} \{|g(\sigma)| + 2\sigma |g'(\sigma)|\},$$

$$(25.127)$$

其中 X 为不变集，即有

$$S(t)X = X, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ X \text{ 在 } D(A) \text{中有界}, \quad (25.128)$$

$$|X|_\infty = \sup_{v \in X} \sup_{x \in [0, L]} |v(x)|, \quad (25.129)$$

则由(25.124)定义的 q_μ 可估计如下：

$$\frac{1}{L^2}\{|w|_0^2 + L^2 |w_x|_0^2\} \leq q_\mu(t, w)$$

$$\leq \mu\{|w|_0^2 + L^2 |w_x|^2\}. \qquad \forall w \in V \quad (25.130)$$

因此，对于固定的 t，$\{q_\mu(t, \cdot)\}^{\frac{1}{2}}$ 等价于在 v 上的模 $|\cdot|_v$. 另一方面，存在常数 $c_3 = c_3(X)$，使

$$|V_\mu(t, w)| \leq c_3 |w|_0^{\frac{3}{2}} (|w|_0^2 + L^2 |w_x|_0^2)^{\frac{1}{4}}. \qquad \forall w \in V$$

$$(25.131)$$

事实上，依(25.37)有

$$iu_t = Au - g(|u|^2)u - i\gamma u + f.$$

因 $u \in X$，而 X 在 $D(A)$中有界，因此存在常数 $c_4 = c_4(X)$，使

$$|u_t|_0 \leq c_4. \qquad \forall t \in \mathbb{R} \quad (25.132)$$

由于 $|u(x, t)| < x_\infty$, $\forall x$, t，由(25.122)可得

$$|V(t, w)| \leq c_5 \int_0^L |w|^2 |u_t| dx$$

$$\leq c_4 c_5 \left\{\int_0^L |w|^4 dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq c_4 c_5 |w|_0^{\frac{3}{2}} \left(2|w_x|_0 + \frac{1}{L}|w|_0\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (25.133)$$

由(25.125)有

$$|r_\mu(t, w)| \leq |r(t, w)| + 4\mu c_6 \int_0^L |w|^2 dx,$$

由此即得(25.131).

在 $V_R\times V_R$ 上定义双线性形式为

$$\varphi(t;\eta,\xi)=\mathrm{Re}\int_0^L\{\eta_x\bar{\xi}_x+\mu\bar{\xi}\eta-g(|u|^2)\eta\bar{\xi}$$
$$-2g'(|u|^2)\mathrm{Re}(u\bar{\eta})\mathrm{Re}(u\bar{\xi})+\mu\eta\bar{\xi}\}dx. \tag{25.134}$$

显然, $\varphi(t;\cdot,\cdot)=q_\mu(t,\cdot)$. 因此 $\varphi(t;\cdot,\cdot)$是在 V 上的内积, 它是连续的, 强制的. 引入 Gram 行列式

$$H_m(t)=\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}\varphi(t;w^i(t),w^j(t)) \tag{25.135}$$

和 $\quad G_m(t)=|w^1(t)\wedge\cdots\wedge w^m(t)|_V^2=\det\limits_{1\leqslant i,j\leqslant m}(w^i(t),w^j(t))$.

我们知道, m个矢量 $\xi^1,\cdots,\xi^m$ 在希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 具内积 $\psi(\cdot,\cdot)$的 Gram 行列式也是在 $\mathbb{R}^m$ 上的二次型

$$(x_1,\cdots,x_m)\to\psi\left\{\sum_{j=1}^m x_j\xi^j,\ \sum_{j=1}^m x_j\xi^j\right\}$$

的行列式. 而且, 由古典的极大极小原理, 这个行列式等于这个二次型m个特征值的乘积, 即有

$$\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}\psi(\xi^i,\xi^j)=\prod_{l=1}^m\max_{\substack{G\subset\mathbb{R}^m\\ \dim G=l}}\min_{\substack{\sum_{j=1}^m x_j^2=1\\ x\in G}}\psi(x_j\xi^j,x_j\xi^j). \tag{25.136}$$

因此, 如果在 $\mathscr{H}$ 上另一内积为 ψ_1, 它是强制和连续的, 即

$$\alpha\psi(\xi,\xi)\leqslant\psi_1(\xi,\xi)\leqslant\beta\psi(\xi,\xi),\qquad\forall\xi\in\mathscr{H} \tag{25.137}$$

则有

$$\alpha^m\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}\psi(\xi^i,\xi^j)\leqslant\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}\psi_1(\xi^i,\xi^j)$$
$$\leqslant\beta^m\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}\psi(\xi^i,\xi^j). \tag{25.138}$$

现如取内积 $\mathscr{H}=V$, 依(25.130), 如取 $\beta=\mu$, $\alpha=L^{-2}$, 则(25.137)满足. 因此, 由(25.138), 有

引理 4 在以上的假设下, 有

$$L^{-2m}G_m(t)\leqslant H_m(t)\leqslant\mu^m G_m(t).\qquad\forall t\in\mathbb{R} \tag{25.139}$$

现对 $H_m(t)$ 关于 t 求导，由经典的行列式求导法则，有

$$\frac{d}{dt}H_m(t)=\sum_{l=1}^{m}\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}\psi(t;w^i(t),\ w^j(t))_l, \tag{25.140}$$

其中

$$\varphi(t;w^i(t),\ w^j(t))_l=(1-\delta_{jl})\varphi(t;w^i(t),\ w^j(t))$$
$$+\delta_{jl}\frac{d}{dt}\{\varphi(t;w^i(t),\ w^j(t))\}. \tag{25.141}$$

由(25.124)和公式

$$4\varphi(t;w^i(t),\ w^j(t))=q_\mu(t,\ w^i(t)+w^j(t))$$
$$-q_\mu(t,\ w^i(t)-w^j(t)),$$

有

$$\frac{d}{dt}\{\varphi(t;w^i(t),\ w^j(t))\}=\rho(t;w^i(t),\ w^j(t)), \tag{25.142}$$

其中

$$4\rho(t;\eta,\ \xi)=r_\mu(t,\ \eta+\xi)-r_\mu(t,\ \eta-\xi) \tag{25.143}$$

和对称双线性形式 $r_\mu(t,\ \cdot)$ 相联．令

$$\psi(x,\ y)=\varphi(t;x_jw^j(t),\ y_jw^j(t)),$$
$$\psi_2(x,\ y)=\rho(t;x_jw^j(t),\ y_jw^j(t)),$$

利用引理 3，可得

$$\frac{dH_m(t)}{dt}=H_m(t)\sum_{l=1}^{m}\max_{\substack{F\subset\mathbb{R}^m\\ \dim F=l}}\min_{\substack{x\in F\\ x\neq 0}}\frac{r_\mu\left(t,\ \sum\limits_{j=1}^{m}x_jw^j(t)\right)}{q_\mu\left(t,\ \sum\limits_{j=1}^{m}x_jw^j(t)\right)}. \tag{25.144}$$

现在来估计在 V 中由算子 $DS(t)u_0$ 所形成的 m 维体积的变化．我们有定理

定理 3 设 X 是一不变集，并在 $D(A)$ 中有界，则存在两个常数 c_1 和 c_2，使对任何 $v_0\in X$，$m\geqslant 1$，$t\geqslant 0$，$v^i(t)=(DS(t)u_0)v_0^i$ 满足

$$|v^1(t)\wedge\cdots\wedge v^m(t)|_V$$
$$\leqslant|v_0^1(t)\wedge\cdots\wedge v_0^m(t)|_V c_1^m\exp(c_2-\gamma m)t. \tag{25.145}$$

证明 令 $w(x,t)=v(x,t)e^{\gamma t}$，则有

$$|v^1(t)\wedge\cdots\wedge v^m(t)|^2=e^{-2\gamma mt}G_m(t), \tag{25.146}$$

其中

$$G_m(t)=|w^1(t)\wedge\cdots\wedge w^m(t)|_V^2. \tag{25.147}$$

如 $|v_0^1\wedge\cdots\wedge v_0^m|^2=0$，则 v_0^i 线性相关，$v^i(t)$亦然，因此(25.145)显然成立．如 $|v_0^1\wedge\cdots\wedge v_0^m|_V\neq 0$，则由连续性可知对小 t，$|v^1(t)\wedge\cdots\wedge v^m(t)|\neq 0$，则 $\{w^1(t),\cdots,w^m(t)\}$ 也是线性无关的．因此对 $G\subset\mathbb{R}^m$，$x\in G\setminus\{0\}$，$q_\mu\left(t,\sum_{j=1}^m x_j w^j(t)\right)\neq 0$．由(25.130)、(25.131)，有

$$\frac{r_\mu\left(t,\sum_{j=1}^m x_j w^j(t)\right)}{q_\mu\left(t,\sum_{j=1}^m x_j w^j(t)\right)}\leqslant\frac{c_3}{\alpha}\frac{\left|\sum_{j=1}^m x_j w^j(t)\right|_0^{\frac{3}{2}}}{\left|\sum_{j=1}^m x_j w^j(t)\right|_V^{\frac{3}{2}}}. \tag{25.148}$$

因 $H_m(t)\geqslant 0$，且由(25.144)，有

$$\frac{dH_m(t)}{dt}\leqslant\frac{c_3 H_m(t)}{\alpha}\sum_{l=1}^m\max_{\substack{G\subset\mathbb{R}^m\\ \dim G=l}}\min_{\substack{x\neq 0\\ x\in G}}\frac{\left|\sum_{j=1}^m x_j w^j(t)\right|_0^{\frac{3}{2}}}{\left|\sum_{j=1}^m x_j w^j(t)\right|_V^{\frac{3}{2}}}. \tag{25.149}$$

注意到当 $F\subset\mathbb{R}^m$,$\dim F=l$ 为给定时，对 $x\in F$，$\sum_{j=1}^m x_j w^j(t)$ 张成 $F(t)$为 V 的 l 维子空间，因此

$$\min_{\substack{x\in F\\ x\neq 0}}\frac{\left|\sum_{j=1}^m x_j w^j(t)\right|_0^{\frac{3}{2}}}{\left|\sum_{j=1}^m x_j w^j(t)\right|_V^{\frac{3}{2}}}\leqslant\max_{\substack{\mathscr{F}\subset V\\ \dim\mathscr{F}=l}}\min_{\substack{\xi\in\mathscr{F}\\ \xi\neq 0}}\frac{|\xi|_0^{\frac{3}{2}}}{|\xi|_V^{\frac{3}{2}}}, \tag{25.150}$$

而

$$\max_{\substack{\mathscr{F}\in V\\ \dim\mathscr{F}=l}}\min_{\substack{\xi\in\mathscr{F}\\ \xi\neq 0}}\frac{|\xi|_0^2}{|\xi|_0^2+L^2|\xi_x|^2}=\frac{1}{1+L^2\lambda_l}. \tag{25.151}$$

因此，由(25.150)、(25.151)，可得

$$\frac{dH_m(t)}{dt}\leqslant\frac{c_3}{\alpha}\left(\sum_{l=1}^m\frac{1}{(1+L^2\lambda_l)^{3/4}}\right)H_m(t),$$

其中 $\alpha=L^{-2}$. 因 $\lambda_l\sim c_0L^{-2}l^2$, $l\to\infty$, $\sum\limits_{l=1}^{m}\frac{1}{(1+L^2\lambda_l)^{\frac{3}{4}}}<\infty$, 因此存在常数 c_2, 使

$$\frac{dH_m(t)}{dt}\leqslant 2c_2H_m(t), \tag{25.152}$$

于是有

$$H_m(t)\leqslant e^{2c_2t}H_m(0). \qquad \forall t\geqslant 0 \tag{25.153}$$

由(25.146)、(25.147)、(25.139)和(25.153), 可得(25.145), 其中

$$c_1=\frac{1}{L\sqrt{\mu}}.$$

以下估计整体吸引子 $\mathscr{A}$ 的维数.

我们知道, 一个度量空间 $\mathscr{E}$ 的分形维数定义为

$$\mathscr{A}_F(\mathscr{E})=\limsup_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\log N_\varepsilon(\mathscr{E})}{\log\left(\frac{1}{\mathscr{E}}\right)}, \tag{25.154}$$

其中 $N_\varepsilon(\mathscr{E})$表示覆盖$\mathscr{E}$的半径为 ε 的球的最小数目.我们知道,有

$$d_H(\mathscr{E})\leqslant d_F(\mathscr{E}),$$

其中 $d_H(\mathscr{E})$ 表示 $\mathscr{E}$ 的豪斯多夫维数. 在希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 的紧子集 X 上定义非线性映射 S; 且设

$$SX=X. \tag{25.155}$$

设对任何 $u\in X$, 存在线性算子 $L(u)\in\mathscr{L}(\mathscr{H},\mathscr{H})$, 使

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\substack{u,v\in\mathscr{X}\\ 0<|u-v|_{\mathscr{H}}<\varepsilon}}\frac{|sv-su-L(u)(v-u)|_{\mathscr{H}}}{|v-u|_{\mathscr{H}}}=0, \tag{25.156}$$

和

$$\sup_{u\in\mathscr{X}}|L(u)|_{\mathscr{L}(\mathscr{H})}<\infty. \tag{25.157}$$

我们以 $w_m(L)$表示在 $\Lambda^m\mathscr{H}$ 上 L 的第m个外积的模

$$w_m(L)=\sup(\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}(L\xi^i,L\xi^j)_{\mathscr{H}})^{\frac{1}{2}}, \tag{25.158}$$

其中上确界 sup 是对一切 $\{\xi^i\}_{i=1}^m$ 取的, $\det\limits_{1\leqslant i,j\leqslant m}(\xi^i,\xi^j)\leqslant 1$. 置

$$\overline{w}_m = \sup_{u \in X} w_m(L(u)), \tag{25.159}$$

定义在 X 上的一致李雅普诺夫指数为

$$\mu_1 = \log \overline{w}_1, \quad \mu_j = \log \overline{w}_j - \log \overline{w}_{j-1}, \ j \geqslant 2. \tag{25.160}$$

定理 4 在假设(25.135)～(25.157)下，如存在 $m \geqslant 0$，使得

$$\mu_1 + \cdots + \mu_m < 0, \tag{25.161}$$

则

$$d_H(x) \leqslant m+1, \tag{25.162}$$

$$d_F(X) \leqslant (m+1) \max_{1 \leqslant l \leqslant m} \left(1 + \frac{|\mu_1 + \cdots + \mu_l|}{|\mu_1 + \cdots + \mu_{m+1}|}\right). \tag{25.163}$$

定理 5 定理 2 中的整体吸引子 $\mathscr{A}$ 在 V 上具有有限的分形和豪斯多夫维数.

证明 固定某正数 $t_0 > 0$，考虑映射 $S = S(nt_0)$，$n \geqslant 1$. 取 $\mathscr{H} = V$. $X = \mathscr{A}$，$\mathscr{A}$ 在 V 中是紧的. $D(A) \to V$ 是紧映射. 依命题 6，$L(u_0) = DS(nt_0)u_0$ 满足(25.156)、(25.157)依定理 3 和(25.158)，有

$$w_m(L(u_0)) \leqslant c_1^m \exp(c_2 - \gamma_m) n t_0.$$

因右端与 $u_0 \in \mathscr{A}$ 无关，有

$$\overline{w}_m \leqslant c_1^m \exp(c_2 - \gamma_m) n t_0. \tag{25.164}$$

固定 $m \in \mathbf{N}$，$\gamma_m > c_2$，则存在 n_0，使 $S = S(n_0 t_0)$，

$$\overline{w}_m < 1, \tag{25.165}$$

(25.161)成立，因而(25.162)、(25.163)成立. 于是定理 5 成立.

§26 具阻尼的非线性波动方程整体吸引子及其豪斯多夫维数、分形维数估计

§26.1 线性波动方程

考虑如下线性波动方程

$$\ddot{u}(t)+\alpha\dot{u}(t)+Au(t)=f(t), \qquad 0<t<T \quad (26.1)$$

具初值

$$u(0)=u_0, \qquad \dot{u}(0)=u_1, \quad (26.2)$$

其中 A 为在实希尔伯特空间 H 上, $D(A)$ 在 H 中稠的线性自共轭无界算子, 且 A 是正的.

$$(Av,\ v)>0,\ \ v\neq 0,\ \ v\in D(A)=\{v\in H,\ Av\in H\}. \quad (26.3)$$

A 的 s 幂 $A^s(s\in\mathbb{R})$, 其定义域为空间

$$V_{2s}=D(A^s), \qquad s\in\mathbb{R} \quad (26.4)$$

是具内积

$$(u,\ v)_{2s}=(A^s u,\ A^s v) \qquad \forall u,\ v\in D(A^s)$$

的希尔伯特空间. $|u|_s=(u,\ u)_s^{\frac{1}{2}}, u\in V_s$, $L^p(I,X)$ 表示从 I 到 X 的可测函数 f 组成的空间, 具模

$$\|f\|_{L^p(I;X)}=\left(\int_I\|f(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

$1\leqslant p<\infty$; 对 $p=\infty$,

$$\|f\|_{L^p(I;X)}=\sup_{t\in I}\text{ess}\|f(t)\|_X.$$

$C(I;\ X)$ 表从 I 到 X 的连续函数空间. $C_b(I;\ X)=C(I;\ X)\cap L^\infty(I;X)$ 表示从 I 到 X 的连续有界函数.

定理1 若 $f\in L^2(0,\ T;H)$, $u_0\in V_1, u_1\in H$, 则问题(26.1)、(26.2)具有唯一解 $\{u,\ \dot{u}\}\in c([0,\ T];V_1\times H)$. 如

$$f\in C([0,\ T];H), \qquad \dot{f}\in L^2(0,\ T;H), \qquad u_0\in V_2,\ u_1\in V_1$$

则(26.1)、(26.2)具有解 $(u,\ \dot{u},\ \ddot{u})\in c([0,\ T],\ V_2\times V_1\times H)$.

群 $\Sigma(t)$: 以 $\Sigma(t)$ 表示映射 $\{u_0,\ u_1\}\to\{u(t),\ \dot{u}(t)\}$, 其中 $t\in\mathbb{R}$; u 为问题(26.1)、(26.2)的解; $f(t)=0$, $\forall t$; $\Sigma(t)$ 是线性连续算子, 从 $E_0=V_1\times H$ 到自身(或 $E_2=V_2\times V_1$ 到自身).

在耗散情况下轨线的一致有界性: 当 $\alpha=0$ 时方程(26.1)是守恒的. 即有如下的能量守恒:

$$|u(t)|_1^2+|\dot{u}(t)|^2=|u_0|_1^2+|u_1|^2+2\int_0^t(f(s),\ \dot{u}(s))ds.$$

当 $f=0$, 即 $|u|_1^2+|\dot{u}|^2$ 是守恒量, 如 $\alpha>0$, $f\equiv 0$, 则 $|u|_1^2+|\dot{u}|^2$ 当 $t\to\infty$ 时指数衰减, 如 $f\neq 0$, $f\in C(\mathbb{R}_+, H)$, 则 $\{u, \dot{u}\}\in C_t(\mathbb{R}_+; E_0)$. 设 $\alpha>0$.

命题 1 设 $f\in C_b(\mathbb{R}_+; H)$, $u_0\in V_1$, $u_1\in H$. 设 λ_1 表示算子 A 的第一特征值. 对任何 ε, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, $\varepsilon_0=\min\left(\frac{\alpha}{4}, \frac{\lambda_1}{2\alpha}\right)$, 则问题(26.1)、(26.2)的解满足: (对任意 $t>0$)

$$|u(t)|_1^2+|\dot{u}(t)+\varepsilon u(t)|^2\leqslant\{|u_0|_1^2+|u_1+\varepsilon u_0|^2\}e^{-\varepsilon t}+\frac{1-e^{-\varepsilon t}}{\alpha\varepsilon}|f|^2_{L^\infty(\mathbb{R}_+; H)}, \quad (26.5)$$

$$|u(t)|^2+|\dot{u}(t)+\varepsilon u(t)|^2_{-1}\leqslant\{|u_0|^2+|u_1+\varepsilon u_0|^2_{L_{-1}}\}e^{-\varepsilon t}+\frac{1-e^{-\varepsilon t}}{\alpha\varepsilon}|f|^2_{L^\infty(\mathbb{R}_+; V_{-1})}. \quad (26.6)$$

证明 置 $v=\dot{u}+\varepsilon u$, (26.1)可写为

$$\dot{v}+(\alpha-\varepsilon)v+(A-\varepsilon(\alpha-\varepsilon))u=f. \quad (26.7)$$

(26.1)与 u 作内积, (26.7)与 v 作内积, 联合起来, 可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|u|_1^2+|v|^2)+\varepsilon|u|_1^2+(\alpha-\varepsilon)|v|^2-\varepsilon(\alpha-\varepsilon)(u, v)=(f, v).$$

因

$$\begin{aligned}&\varepsilon|u|_1^2+(\alpha-\varepsilon)|v|^2-\varepsilon(\alpha-\varepsilon)(u, v)\\&\geqslant\varepsilon|u|_1^2+(\alpha-\varepsilon)|v|^2-\frac{\varepsilon(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{\lambda_1}}|u|_1|v|\\&\geqslant\varepsilon|u|_1^2+(\alpha-\varepsilon)|v|^2-\sqrt{\frac{\varepsilon}{2\alpha}}(\alpha-\varepsilon)|u|_1|v|\\&\geqslant\frac{\varepsilon}{2}(|v|^2+|u|_1^2)+\frac{\alpha}{2}|v|^2,\end{aligned} \quad (26.8)$$

因此

$$\frac{d}{dt}(|u|_1^2+|v|^2)+\varepsilon(|u|_1^2+|v|^2)+\alpha|v|^2$$

$$\leqslant 2(f,v)\leqslant\alpha|v|^2+\frac{1}{\alpha}|f|^2. \qquad (26.9)$$

由(26.9)和格隆沃尔不等式可得(26.5). 由(26.7)，作关于 $v(\cdot,\cdot)_{-1}$ 的内积, 得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|u|^2+|v|_{-1}^2)+\varepsilon|u|^2+(\alpha-\varepsilon)|v|_{-1}^2$$
$$-\varepsilon(\alpha-\varepsilon)(u,v)_{-1}$$
$$=(f,v)_{-1}.$$

由(26.8), 易得:

$$\varepsilon|u|^2+(\alpha-\varepsilon)|v|_{-1}^2-\varepsilon(\alpha-\varepsilon)(u,v)_{-1}$$
$$\geqslant\frac{\varepsilon}{2}(|u|^2+|v|_{-1}^2)+\frac{\alpha}{2}|v|_{-1}^2, \qquad (26.10)$$

因此

$$\frac{d}{dt}(|u|^2+|v|_{-1}^2)+\varepsilon(|u|^2+|v|_{-1}^2)+\alpha|v|_{-1}^2$$
$$\leqslant 2(f,v)_{-1}\leqslant 2|f|_{-1}|v|_{-1}\leqslant\alpha|v|_{-1}^2+\frac{1}{\alpha}|f|_{-1}^2,$$

于是得到(26.6).

附注 1 令 $\varphi=\{u,v\}$, $v=\dot{u}+\varepsilon u$, 则(26.1)可写成方程组

$$\dot{\varphi}+A_\varepsilon\varphi=\mathscr{F}, \qquad (26.11)$$

其中 $\mathscr{F}=(0,f)$, 且

$$A_\varepsilon=\begin{pmatrix}\varepsilon & -1\\ -\varepsilon(\alpha-\varepsilon)+A & \alpha-\varepsilon\end{pmatrix}. \qquad (26.12)$$

我们能在乘积空间 $E_1=V_2\times V_1$, $E_0=V_1\times H$ 或 $E_{-1}=H\times V_{-1}$ 上考虑演化方程(26.11). 对于 $\alpha>0$, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$. 我们能定义群算子 $\Sigma_\varepsilon(t)$ 为线性算子:

$$\varphi_0\in E_i\to\varphi(t)=\Sigma_\varepsilon(t)\varphi_0\in E_i,$$

$t\in\mathbb{R}$, 其中 $\varphi(t)$为方程 $\dot{\varphi}+A_\varepsilon\varphi=0$, 具初值 $\varphi(0)=\varphi_0$ 的解. 命题1证明了 Σ_ε 在 E_0 和 E_{-1} 中$(0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0)$是指数衰减的;

$$\|\Sigma_s(t)\|_{\mathscr{L}(E_1)}\leqslant e^{-\varepsilon t/2}, \qquad t\geqslant 0 \quad (26.13)$$

$$\|\Sigma_\varepsilon(t)\|_{\mathscr{L}(E_{-1})}\leqslant e^{-\varepsilon t}. \qquad t\geqslant 0 \quad (26.14)$$

当 $\alpha>0$,我们考虑在实线 $\mathbb{R}$ 上的有界解,即对 $f\in C_b(\mathbb{R},\ H)$,求解(26.1)具边界条件的解满足:

$$\limsup_{t\to-\infty}|(u(t),\ \dot{u}(t))|_{E_0}<+\infty. \qquad (26.15)$$

命题 2 设 $f\in C_b(\mathbb{R},\ H)$,则(26.1)有唯一解$\{u,\ \dot{u}\}\in c_b(\mathbb{R},\ E_0)$,且有

$$\{u(t),\ \dot{u}(t)+\varepsilon u(t)\}=\int_{-\infty}^{t}\Sigma_\varepsilon(t-\tau)\{0,\ f(\tau)\}d\tau, \qquad (26.16)$$

其中 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$.如进一步,设 $f、\dot{f}\in c_b(\mathbb{R},H)$,则$\{u,\ \dot{u}\}\in C_b(\mathbb{R};\ E_1)$,$\{\dot{u},\ \ddot{u}\}\in C_b(\mathbb{R};\ E_0)$.

证明 对于唯一性,我们必须证明如 u 满足(26.1)和 $\{u,\ u\}\in C_b(\mathbb{R},\ E_0)$、$f=0$,则 $u\equiv 0$. 实际上,我们能在更弱的条件$\{u,\ \dot{u}\}\in C_b(\mathbb{R},\ E_+)$下证明 $u\equiv 0$. 对此,给定$t\geqslant s$,由(26.6),$f\equiv 0$,有:

$$|u(t)|^2+|\dot{u}(t)+\varepsilon u(t)|_{-1}^2$$
$$\leqslant\{|u(s)|^2+|\dot{u}(s)+\varepsilon u(s)|_{-1}^2\}e^{-\varepsilon(t-s)}\leqslant ce^{-\varepsilon(t-s)},$$

其中 c 与 s 无关. 令 $s\to-\infty$,则得 $u(t)=0$.

对于存在性,置 $\psi(t,\ \tau)=\Sigma_\varepsilon(t-\tau)(0,\ f(\tau))$. 由(26.13),对于 $t\in\mathbb{R}$,可知 $\psi(t,\ \cdot)\in L^1(-\infty,\ t;\ E_0)$,且

$$|\psi(t,\ \tau)|_{E_0}\leqslant e^{-\frac{1}{2}\varepsilon(t-\tau)}|f|_{L^\infty(\mathbb{R},H)}. \qquad \tau\leqslant t$$

因此,可定义 $\varphi\in c(\mathbb{R},\ E_0)$为

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{t}\psi(t,\ \tau)d\tau, \qquad (26.17)$$

且

$$|\varphi|_{L^\infty(\mathbb{R},E_0)}\leqslant\int_{-\infty}^{t}e^{-\frac{\varepsilon}{2}(t-\tau)}d\tau|f|_{L^\infty(\mathbb{R},H)}$$
$$=\frac{2}{\varepsilon}|f|_{L^\infty(\mathbb{R},H)}. \qquad (26.18)$$

另一方面,函数 $\psi(\cdot,\ \tau)$是以下柯西问题

$$\psi(\cdot, \tau)\in c(\mathbb{R}, E_0),$$

$$\frac{d}{dt}\psi(t,\tau)+\Lambda_s\psi(t, \tau)=0,\ \psi(\tau, \tau)=\{0, f(\tau)\}$$

的解.

由于算子 Λ_s 映射 E_0 为 $E_+=H\times V_{-1}$, 是从 E_0 到 E_{-1} 的线性连续算子, 就有 $\frac{d}{dt}\psi(t, \tau)\in C(\mathbb{R}, E_{-1})$. 如令 β 表示 Λ_s 在 $C(E_0, E_{-1})$ 中的模, 则有

$$\left|\frac{d}{dt}\psi(t, \tau)\right|_{L^\infty(\mathbb{R}, E_{-1})}\leqslant\beta|\psi(t, \tau)|_{L^\infty(\mathbb{R}, E_0)}$$
$$\leqslant\beta e^{-\varepsilon_0(t-\tau)/2}|f|_{L_\infty(\mathbb{R}, H)}.$$

由(26.17), 有

$$\dot\varphi(t)=\psi(t, t)+\int_{-\infty}^{t}\frac{d\psi(t, \tau)}{dt}d\tau$$
$$=\{0, f(t)\}-\Lambda_s\int_{-\infty}^{t}\psi(t, \tau)d\tau$$
$$=\{0, f(t)\}-\Lambda_s\varphi(t),$$

因此 $\varphi(t)\in C^1(\mathbb{R}, E_{-1})$. 且知 $\varphi(t)=\{u(t), v(t)\}$, 其中 $v=\dot u+\varepsilon u$ 满足方程(26.11), (26.16)得证. 当 f、$\dot f\in C_b(\mathbb{R}, H)$, 则

$$\{u, \dot u, \ddot u\}\in C([-T, T], V_2\times V_1\times H). \qquad \forall T>0$$

因为 $\ddot u\in C_b(\mathbb{R}, V_{-1})$, 因此 $w=\dot u$ 满足 $\{w, \dot w\}\in C_b(\mathbb{R}, E_{-1})$, 且

$$\ddot w+\alpha\dot w+Aw=\dot f. \tag{26.19}$$

由前面证明, 已知(26.1)具有一解 $\{w, \dot w\}\in C_b(\mathbb{R}, E_0)$, 且这个解在 $C_b(\mathbb{R}, E_{-1})$ 中是唯一的. 因此 $\ddot u\in C_b(\mathbb{R}, H)$, $\dot u\in C_b(\mathbb{R}, V_1)$, 则由(26.1)推出 $Au\in C_b(\mathbb{R}, H)$. 因此 $u\in C_b(\mathbb{R}, V_2)$. 命题得证.

命题 3 设 $s\in\mathbb{R}$, 设

$$u_0\in V_{s+1}, \qquad u_1\in V_s, \qquad f\in L^2(0, T; V_s), \tag{26.20}$$

则存在唯一的函数 u, 满足

$$\{u, \dot u\}\in C([0, T]; V_{s+1}\times V_s) \tag{26.21}$$

和(26.1)、(26.2). 进一步, 如下能量不等式成立

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|u|_{s+1}^2+|v|_s^2)&+\varepsilon|u|_{s+1}^2+(\alpha-\varepsilon)|v|_s^2\\
&+\varepsilon(\varepsilon-\alpha)(u,\ v)_s\\
&=(f,\ v)_s,
\end{aligned}
\tag{26.22}
$$

其中 $v=\dot{u}+\varepsilon u$.

证明 我们仅需证明命题3当 $s=0$ 时的情况.至于一般情况 $s\in\mathbb{R}$,只要将 V_1、H、V_{-1} 换为 V_{s+1}、V_s、V_{s-1} 即可. 可考虑 $\alpha=0$、$\varepsilon=0$ 的简单情况. 存在性证明要用伽辽金方法,唯一性可由能量等式得到.

§26.2 非线性方程

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为连通有界开集,边界 $\partial\Omega\in C^\infty$. 设函数 $u=u(x,\ t)$(其中 $x\in\bar{\Omega}$, $t\in\mathbb{R}_+$)满足非线性波动方程

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\alpha\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u+g(u)=f,\qquad (x,\ t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+ \tag{26.23}
$$

和初边值条件

$$
u(x,\ t)=0,\qquad \partial\Omega\times\mathbb{R}_+ \tag{26.24}
$$

$$
u(x,\ 0)=u_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0)=u_1(x).\qquad x\in\Omega \tag{26.25}
$$

这里函数 f、u_0 和 u_1 给定,$\alpha>0$.

为了将问题(26.23)~(26.25)写成泛函形式,令

$$
H=L^2(\Omega),\qquad D(A)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega),
$$

$$
Au=-\Delta u,\qquad V_1=D(A^{\frac{1}{2}})=H_0^1(\Omega).
$$

(26.23)~(26.25)可写成无穷维的常微分方程

$$
\ddot{u}+\alpha\dot{u}+Au+g(u)=f, \tag{26.26}
$$

$$
u(0)=u_0,\qquad \dot{u}(0)=u_1. \tag{26.27}
$$

设 λ_1 为 A 的第一特征值,如命题1,我们引进 $v=\dot{u}+\varepsilon u$、$\varphi=\{u,\ v\}$,(26.26)、(26.27)能改写为

$$
\dot{\varphi}+\Lambda_\varepsilon\varphi+\Gamma(\varphi)=\mathscr{F}, \tag{26.28}
$$

$$\varphi(0)=\varphi_0=\{u_0,\ v_0\}, \tag{26.29}$$

其中

$$\Gamma(\varphi)=\{0,\ g(u)\},\ \mathscr{F}=(0,\ f),\ v_0=u_1+\varepsilon u_0. \tag{26.30}$$

现对非线性项 $g(u)$ 作假设. 设 $g\in C^1(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$,

$$G(s)=\int_0^s g(\sigma)d\sigma,$$

作如下假设:

$$\liminf_{|s|\to\infty}\frac{G(s)}{s^2}\geqslant 0, \tag{26.31}$$

存在 $c_1>0$, 使

$$\liminf_{|s|\to\infty}\frac{sg(s)-c_1G(s)}{s^2}\geqslant 0. \tag{26.32}$$

当 $n\geqslant 2$ 时,

$$|g'(s)|\leqslant c(1+|s|^r),\quad \begin{cases} 0\leqslant r<\infty, & \text{当 } n=2 \text{ 时},\\ 0\leqslant r<2, & \text{当 } n=3 \text{ 时},\\ r=0, & \text{当 } n\geqslant 4 \text{ 时}. \end{cases} \tag{26.33}$$

定义 1 如果对于任何 $E_i(i=0,\ 1)$ 中的有界集 B, 存在 $T=T(B)$ 使得对 $t\geqslant T(B)$、$\varphi(t)\in B_i\ (i=0,\ 1)$, 其中 $\varphi(t)$ 是问题(26.28)、(26.29)的解, $\varphi_0\in B$, 则称在 E_i 中的有界集 B_i 为方程(26.28)在 E_i 中的吸收集.

定理 1 设 f、u_0、u_1 给定,满足

$$f\in C_b(\mathbb{R}_+,\ L^2(\Omega)),\ u_0\in H_0^1(\Omega),\ u_1\in L^2(\Omega), \tag{26.34}$$

则问题(26.26)、(26.27)(或等价问题(26.28)、(26.29))具有唯一解 u,满足

$$\{u,\ \dot{u}\}\in C_b(\mathbb{R}_+,\ H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)).$$

更进一步,存在在 $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 的闭球,它在 $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 中对于方程(26.28)是吸收的.

证明 由命题 1, 可知问题(26.24)、(26.25)具有唯一解, $\{u,\ \dot{u}\}\in C(\mathbb{R}_+,\ V_1\times H\}$. 以下表明 $\{u,\ \dot{u}\}\in L^\infty(\mathbb{R}_+,\ V_1\times H)$, 且存在在 $V_1\times H$ 中的一个吸收集.

现作一致性估计. 由(26.31)、(26.32)可知，存在两个有限的非负常数 k_1 和 k_2，使得

$$\int_\Omega G(u)dx+\frac{1}{8c_1}|u|_1^2\geqslant -k_1, \qquad \forall u\in V_1 \quad (26.35)$$

$$(u,\ g(u))-c_1\int_\Omega G(u)dx+\frac{1}{8}c_1\geqslant -k_2 \qquad \forall u\in V_1 \quad (26.36)$$

引入函数 $\int_\Omega \overline{G}(u)dx=\int_\Omega G(u)dx+\frac{1}{8c_1}|u|_1^2+k_1$，则

$$\int_\Omega \overline{G}(u)dx\geqslant 0. \qquad u\in V_1$$

方程(26.28)与 φ 作内积，得：($\varphi=\{u,\ v\}$，$v=\dot{u}+\varepsilon u$)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|u|_1^2+|v|^2)+\varepsilon|u|_1^2+\varepsilon(\varepsilon-\alpha)(u,\ v)\\&\quad+(\alpha-\varepsilon)|v|^2+(g(u),\ v)\\&=(f,\ v).\end{aligned} \qquad (26.37)$$

因 $(g(u),\ v)=(g(u),\ \dot{u}+\varepsilon u)=\frac{d}{dt}G(u)+\varepsilon(u,\ g(u))$，以及

$$\begin{aligned}&\varepsilon|u|_1^2+\varepsilon(\varepsilon-\alpha)(u,\ v)+(\alpha-\varepsilon)|v|^2\\&\geqslant\frac{\varepsilon}{2}(|u|_1^2+|v|^2)+\frac{\alpha}{2}|v|^2,\end{aligned}$$

从(26.37)可得：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|u|_1^2+|v|^2+2\int_\Omega G(u)dx\right)+\frac{\varepsilon}{2}(|u|_1^2+|v|^2)\\&\quad+\frac{\alpha}{2}|v|^2+\varepsilon(u,\ g(u))\leqslant(f,\ v).\end{aligned} \qquad (26.38)$$

由 k_2 和 $\int_\Omega \overline{G}(u)dx$ 的定义，有

$$\begin{aligned}(u,\ g(u))&\geqslant c_1\int G(u)dx-\frac{1}{8}|u|_1^2-k_2\\&\geqslant c_1\int_\Omega \overline{G}(u)dx-\frac{1}{4}|u|_1^2-(k_2+c_1k_1).\end{aligned}$$

令 $y=\|u\|_1^2+|v|^2+2\int_\Omega G(u)dx$，由(26.38)可得

$$\frac{1}{2}\frac{dy}{dt}+\frac{\varepsilon}{4}(\|u\|_1^2+|v|^2)+\frac{\alpha}{2}|v|^2+\varepsilon c_1\int_\Omega \bar{G}(u)dx$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}k_3+|v|\,|f|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,H)},$$

其中 $k_3=2(k_2+c_1k_1)$．令 $\rho=\min\left(\frac{1}{2},\ c_1\right)$，则由上不等式，有

$$\frac{dy}{dt}+\varepsilon\rho y\leqslant\varepsilon k_3+\frac{1}{\alpha}|f|^2_{L^\infty(\mathbb{R}_+,H)}.$$

由格隆沃尔不等式，可得

$$y(t)\leqslant y(0)e^{-\varepsilon\rho t}+\frac{1-e^{-\varepsilon\rho t}}{\varepsilon\rho}\left(\varepsilon k_3+\frac{1}{\alpha}|f|^2_{L^\infty(\mathbb{R}_+,H)}\right).\tag{26.39}$$

存在有限非负常数 k_4，使

$$\int_\Omega G(u)dx+\frac{1}{4}\|u\|_1^2\geqslant-k_4.\qquad\forall u\in V_1\tag{26.40}$$

由(26.39)、(26.40)可得：$(v=\dot{u}+\varepsilon u)$

$$\frac{1}{2}\|u\|_1^2+|\dot{u}+\varepsilon u|^2\leqslant k_5+(\|u_0\|_1^2+|u_1+\varepsilon u_0|^2$$

$$+2\int_\Omega G(u_0)dx)e^{-\varepsilon\rho t},\tag{26.41}$$

其中

$$k_5=2k_4+\frac{k_3}{\rho}+\frac{1}{\varepsilon\rho\alpha}|f|^2_{L^\infty(\mathbb{R}_+,H)}.\tag{26.42}$$

从(26.41)可知 $\{u,\ \dot{u}\}\in C_b(\mathbb{R}_+,\ e_0)$，且对

$$t\geqslant\frac{1}{\varepsilon\rho}\log\left(\|u_0\|_1^2+|u_1+\varepsilon u_0|^2+2\left|\int G(u_0)dx\right|\right),\tag{26.43}$$

有

$$\varphi(t)=\{u,\ v\}\in\{\psi\in E_0,\ |\psi|^2_{E_0}\leqslant 2k_5+1\}=B_0.\tag{26.44}$$

这就意味着 B_0 为(26.28)在 E_0 中的吸收集.

定理2 设 f、u_0 和 u_1 给定，并满足

$$f、\dot{f}\in C_b(\mathbb{R}_+;\ L^2(\Omega)),\ u_0\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega),\ u_1\in H_0^1(\Omega), \tag{26.45}$$

则问题(26.26)、(26.27)的解满足

$$\{u,\ \dot{u}\}\in C_b(\mathbb{R}_+;\ H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)).$$

更进一步可知，在 $\{H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\}\times H_0^1(\Omega)$ 中的闭球为(26.28)在 $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ 中的吸收集.

证明 先证明如下事实：$\forall R>0$，$\exists\sigma_1>0$，$C(R)$，使得 $\forall\xi\in D(A)$，$|\xi|_1\leqslant R$，

$$|g(\xi)|_1\leqslant C(R)(1+|\xi|_2)^{1-\sigma_1}. \tag{26.46}$$

事实上，对于 $R>0$，$\xi\in D(A)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，使得 $\int_\Omega|\nabla\xi|^2dx\leqslant R^2$，我们有：

$$\begin{aligned}|g(\xi)|_1^2&=\int_\Omega(g'(\xi))^2\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x_i}dx\\&\leqslant|g'(\xi)|^2_{L^\infty(\Omega)}|\xi|_1^2\leqslant C(1+|\xi|^{2\gamma}_{L^\infty(\Omega)})R^2.\end{aligned} \tag{26.47}$$

对 $n=1,\ 2$，由索伯列夫嵌入定理知 $H^{1+\delta}(\Omega)\subset L^\infty(\Omega)$，$\forall\delta>0$. 因此，由插值不等式，有

$$|\xi|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant C_\delta|\xi|_{H^{1+\delta}(\Omega)}\leqslant C_\delta^1|\xi|_2^\delta|\xi|_1^{1-\delta},$$

其中 $\xi\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，$\delta\in(0,\ 1)$.

如取 $\delta=\min\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\gamma\right)$，则由(26.47)推得(26.46)成立，其中 $\sigma_1=\frac{1}{2}$. 对 $n\geqslant4$，因 $|g'(\xi)|\leqslant C$，因此(26.46)也成立，$\sigma_1=1$.

对于 $n=3$，根据阿格蒙(S. Agmon)不等式

$$|\xi|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant C|\xi|_1^{\frac{1}{2}}|\xi|_2^{\frac{1}{2}},\qquad \xi\in V_2\ (n=3)$$

则从(26.47)有

$$|g(\xi)|_1\leqslant C(R)(1+R^{\frac{\gamma}{2}}|\xi|_2^{\frac{\gamma}{2}}).$$

由(26.33)和(26.47)，可知(26.46)成立，$\sigma_1=1-\frac{\gamma}{2}$.

现来证明定理2.(26.28)在 E_1 上与 φ 作内积，可得：

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|u|_2^2+|u|_1^2)+\varepsilon|u|_1^2+\varepsilon(\varepsilon-\alpha)(u,v)_1$$
$$+(\alpha-\varepsilon)|v|_1^2+(g(u),v)_1$$
$$=\varepsilon(f,u)-(\dot{f},Au)+\frac{d}{dt}(f,Au). \tag{26.48}$$

因 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，$\varepsilon_0$ 满足命题1，有

$$\varepsilon|u|_2^2+\varepsilon(\varepsilon-\alpha)(u,v)_1+(\alpha-\varepsilon)|v|_1^2$$
$$\geqslant\frac{\varepsilon}{2}(|u|_2^2+|v|_1^2)+\frac{\alpha}{2}|v|_1^2. \tag{26.49}$$

现取 $R>0$，$|u_0|_2^2+|u_1|_1^2\leqslant R^2$. 由嵌入 $E_1\subset E_0$ 的连续性，可知 $|u_0|_1^2+|u_1|^2\leqslant R_0^2=\frac{R^2}{\lambda_1}$. 依定理1，$\{u,\dot{u}\}\in C_b(\mathbb{R}_+;E_0)$，则存在 $C_3(R_0)$，使

$$|u(t)|_1^2+|\dot{u}(t)|^2\leqslant C_3(R_0). \qquad \forall t\geqslant 0 \tag{26.50}$$

进一步，存在 $T(R_0)$，使

$$|\varphi(t)|_{E_0}^2\leqslant 1+2k_5. \qquad \forall t\geqslant T(R_0) \tag{26.51}$$

由(26.50)和(26.46)，有

$$|(g(u),v)_1|\leqslant|g(u)|_1|v|_1\leqslant C_4(R_0)|v|_1(1+|u|_2)^{1-\sigma_1}$$
$$\leqslant\frac{\alpha}{4}|v|_1^2+\frac{C_4(R_0)^2}{\alpha}(1+|u|_2)^{2-2\sigma_1}$$
$$\leqslant\frac{\alpha}{4}|v|_1^2+\frac{\varepsilon}{4}|u|_2^2+C_5(R_0). \tag{26.52}$$

从(26.50)、(26.52)和(26.48)推出

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{|u|_2^2+|v|_1^2-(f,Au)\}+\frac{\varepsilon}{4}(|u|_2^2+|v|_1^2)$$
$$\leqslant C_6(|f|^2+|\dot{f}|^2)+C(R_0). \tag{26.53}$$

从(26.53)和 f、$\dot{f}\in L^\infty(\mathbb{R}_+;H)$ 易知 $\{u,\dot{u}\}\in C_b(\mathbb{R}_+;D(A)\times V_1\}$.
从(26.51)，有

$$|u(t_0)|_1^2+|u(t_0)|^2\leqslant 2(1+2k_5)\left(1+\frac{\varepsilon^2}{\lambda_1}\right),\ t_0=T(R_0).$$

选取 $R_0=2(1+2k_5)\left(1+\frac{\varepsilon^2}{\lambda_1}\right)$（它与$(u_0,\ u_1)$无关），使当 $t\geqslant t_0$ 时(26.53)成立. 用类似于定理1的证明，可知 $\varphi(t)$ 当 t 充分大时进入 E_1 的闭球.

现考虑比(26.26)更为一般的方程，此时 A 为在实可分希尔伯特空间 H 上的线性自共轭算子，$D(A)$在 H 中稠，A 为正算子，且 A^{-1} 是 H 上的紧算子.

设非线性算子 $g(u)$ 是从 V_1 到 H 的 C^1 映射，具有弗雷歇导数 $g'(u)$，且满足以下条件：存在 $0<\delta\leqslant 1$，对任何 $R>0$，存在 $C_2=C_2(R)$，$k=k(R)$，使

$$\begin{cases}|g(\xi)-g(\eta)|_{-1}\leqslant k|\xi-\eta|,\\ |g'(\xi)-g'(\eta)|_{\mathscr{L}(V_1,H)}\leqslant C_2|\xi-\eta|_1^{\delta},\end{cases}\tag{26.54}$$

其中 ξ、$\eta\in V_1$，$|\xi|_1\leqslant R$，$|\eta|_1\leqslant R$.

存在 $G\in C^1(V_1,\ \mathbb{R})(G(0)=0)$、$p\in C(V_1,\ H)$，使

$$g(\xi)=G'(\xi)+p(\xi).\qquad \forall \xi\in V_1\tag{26.55}$$

存在 $C_1>0$，使

$$\liminf_{|\xi|_1\to\infty}\frac{(\xi,\ g(\xi))-C_1G(\xi)}{|\xi|_1^2}\geqslant 0\tag{26.56}$$

和

$$\liminf_{|\xi|_1\to\infty}\frac{G(\xi)}{|\xi|_1^2}\geqslant 0.\tag{26.56$'$}$$

存在 $\sigma>0$ 和常数 C_3，使

$$\forall \xi\in V_1,\ |P(\xi)|_H\leqslant C_3(1+|G(\xi)|)^{\frac{1}{2}-\sigma}.\tag{26.57}$$

g 映射 $D(A)$为 V_1，在 $D(A)$的有界集上满足 Lip. 条件；且对一切 $k>0$，存在 $\sigma_1>0$ 和 C_4，使

$$\forall \xi\in D(A),\ |\xi|_1\leqslant k,\ |g(\xi)|_1\leqslant C_4(1+|A\xi|)^{1-\sigma_1}.\tag{26.58}$$

存在 $s\in[0,\ 1]$，使得对一切 $\xi\in D(A)$，有

$$\begin{cases}g'(\xi)\in\mathscr{L}(V_s,H),\\ \sup\limits_{|A\xi|\leqslant R}|g'(\xi)|_{\mathscr{L}(V_s,H)}<\infty.\qquad \forall R>0\end{cases}\tag{26.59}$$

现考虑如下抽象非线性方程

$$\ddot{u}+\alpha\dot{u}+Au+g(u)=f, \tag{26.60}$$

$$u(0)=u_0, \quad \dot{u}(0)=u_1. \tag{26.61}$$

(26.60)、(26.61)可写成方程组

$$\dot{\varphi}+A_\varepsilon\varphi+\Gamma(\varphi)=\mathscr{F}, \tag{26.62}$$

$$\varphi(0)=\varphi_0, \tag{26.63}$$

其中

$$\varphi=\{u,\ v\}, \qquad \varphi_0=\{u_0,\ \varepsilon u_0+u_1\},$$

$$\Gamma(\varphi)=\{0,\ g(u)\}, \qquad \mathscr{F}=(0,\ f),$$

$$A_\varepsilon=\begin{pmatrix} \varepsilon & -1 \\ \varepsilon(\varepsilon-\alpha)+A, & \alpha-\varepsilon \end{pmatrix}.$$

对于较(26.26)、(26.27)更一般的问题(26.62)、(26.63)，我们有如下比定理1和定理2更为一般的定理:

定理3 设上述对H、A、g的假设成立.f、u_0、u_1给定，且满足

$$f\in C_b(\mathbb{R}_+;H), \qquad u_0\in V_1,\ u_1\in H \tag{26.64}$$

则问题(26.60)、(26.61)具有唯一解u, $\{u,\dot{u}\}\in C_b(\mathbb{R}_+;V_1\times H)$. 更进一步，在$E_0$中存在一闭球，它在$E_0$中对方程(26.60)是吸收的.

定理4 在定理3条件下，设f、u_0和u_1给定，满足

$$f,\ \dot{f}\in C_b(\mathbb{R}_+;H), \qquad u_0\in V_2,\ u_1\in V_1 \tag{26.65}$$

则问题(26.60)、(26.61)的解满足

$$\{u,\ \dot{u}\}\in C_b(\mathbb{R}_+;V_2\times V_1).$$

更进一步，存在E_1中的闭球，为E_1中对(26.60)的吸收集.

关于问题(26.60)、(26.61)解的存在性、唯一性，有如下经典的结果:

命题4 设f、u_0、u_1给定，且满足

$$f\in C([0,\ T];H), \qquad u_0\in V_1,\ u_1\in H$$

则问题(26.60)、(26.61)($\alpha\in\mathbb{R}$)具有唯一解u，满足

$$\{u,\ \dot{u}\}\in C([0,\ T];\ V_1\times H).$$

更进一步，对任何 $t\in[0, T]$，映射 $\{u_0, u_1\}\to\{u(t), \dot{u}(t)\}$ 是一个从 E_0 到 E_0 的同构。

§ 26.3 最大吸引子

现考虑如下柯西问题：

$$\ddot{u}(t)+\alpha\dot{u}(t)+Au(t)+g(u(t))=f(t), \tag{26.66}$$

$$u(0)=u_0, \qquad \dot{u}(0)=u_1, \tag{26.67}$$

其中 $\dot{f}(t)\equiv 0$, $\forall t\in\mathbb{R}$; H、A 和 $g(u)$ 满足(26.2)中的假定. 此外，还作两个补充假定：

(1) 存在 $\sigma_2>0$, 使得对一切 $\xi\in V_1$, 微商 $g'(\xi)\in\mathscr{L}(H, V_{-1+\sigma_2})$, 且对一切 $R>0$ 有

$$\sup_{|\xi|_1\leq R}|g'(\xi)|_{\mathscr{L}(H, V_{-1+\sigma_2})}<+\infty. \tag{26.68}$$

(2) f、$\dot{f}\in C_b(\mathbb{R}; H)$, 任何(26.62)的解 $\varphi\in C_b(\mathbb{R}, E_0)$ 属于 $C_b(\mathbb{R}, E_1)$, 且有

$$|\varphi|_{L^\infty(\mathbb{R}, E_1)}\leq C_3(|f|_{L^\infty(\mathbb{R}, H)}+|\dot{f}|_{L^\infty(\mathbb{R}, H)}+|\varphi|_{L^\infty(\mathbb{R}, E_0)}). \tag{26.69}$$

于是，(26.66)、(26.67)可写成

$$\dot{\varphi}+A_{\varepsilon_0}\varphi+\Gamma(\varphi)=\mathscr{F}, \tag{26.70}$$

$$\varphi(0)=\varphi_0, \tag{26.71}$$

其中

$$\varphi=\{u, v\}, \qquad \Gamma(\varphi)=\{0, g(u)\},$$

$$\mathscr{F}=(0, f), \qquad \varphi_0=\{u_0, u_1+\varepsilon_0 u_0\},$$

$$A_{\varepsilon_0}=\begin{pmatrix} \varepsilon_0 & -1 \\ \varepsilon_0(\varepsilon_0-\alpha)+A & \alpha-\varepsilon_0 \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_0=\min\left(\frac{\alpha}{4}, \frac{\lambda_1}{2\alpha}\right).$$

对于 $\varphi_0\in E_0$, 映射 $S(t)$: $\varphi_0\to S(t)\varphi_0=\varphi(t)$ (是问题(26.70)、(26.71)的解)是 E_0 上的一个同胚. 因 $\mathscr{F}$ 不依赖于 t, (26.70)是自治的. 因此，$\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 为作用于 E_0 上的非线性半群. 由定理 4, 可知 $S(t)$ 映射 E_1 到 E_1, $S(t)$ 是 E_1 的一个同胚.

因 $S(t)$ 是 E_0 上的一个同胚，它不是一个紧映射，但无论如何，如下的引理表明，由(26.68)可知 $S(t)$ 可表为两个映射之和，其一当 $t\to+\infty$ 时它趋于零，另一个是紧映射。

引理 1 对任何 $t\in\mathbb{R}_+$，由

$$S(t)=\Sigma_{\varepsilon_0}(t)+U(t) \tag{26.72}$$

所定义的从 E_0 到 E_0 的连续映射 $U(t)$ 是一致紧的。即对 E_0 的任何有界集 B 和 $t\in\mathbb{R}$，$\bigcup_{\tau\geqslant t}S(\tau)B$ 在 E_0 中是相对紧的。

证明 问题(26.70)、(26.71)的解可写为

$$\{u(t),\ \dot{u}(t)+\varepsilon u(t)\}=\varphi(t)$$

$$=\Sigma_{\varepsilon_0}(t)\varphi_0+\int_0^t\Sigma_{\varepsilon_0}(t-s)(\mathscr{F}(s)-\Gamma(\varphi(s)))ds.$$

因此，

$$U(t)\varphi_0=\int_0^t\Sigma_{\varepsilon_0}(t-s)(\mathscr{F}(s)-\Gamma(\varphi(s)))ds. \tag{26.73}$$

令 $\{\xi(t),\ \zeta(t)\}=U(t)\varphi_0$，则由(26.73)，有

$$\zeta(t)=\dot{\xi}(t)+\varepsilon_0\xi(t), \tag{26.74}$$

$$\ddot{\xi}(t)+\alpha\dot{\xi}(t)+A\xi(t)=f-g(u(t)),\quad t>0, \tag{26.75}$$

$$\xi(0)=0,\qquad \dot{\xi}(0)=0. \tag{26.76}$$

依定理 3 知，对 $t\geqslant0$，$\{u(t),\ \dot{u}(t)\}$ 在 $V_1\times H$ 的有界集 B 中. 由(26.68)，有 $\frac{d}{dt}(f-g(u))=-g'(u(t))\dot{u}(t)$ 在 $V_{-1+\sigma_1}$ 中对 t 是一致有界的. 因此，存在 $\tilde{C}\geqslant0$，使

$$\left|\frac{d}{dt}(f-g(u))\right|_{-1+\sigma_1}\leqslant\tilde{C}.\qquad \forall t\geqslant0 \tag{26.77}$$

由(26.74)，令 $\eta(t)=\dot{\xi}(t)$，满足

$$\begin{cases}\ddot{\eta}(t)+\alpha\dot{\eta}(t)+A\eta(t)=\dfrac{d}{dt}(f-g(u(t))), & t>0\\ \eta(0)=0,\qquad \dot{\eta}(0)=f-g(u_0).\end{cases} \tag{26.78}$$

将命题 1 应用于 $A^{(\sigma_1-1)/2}\eta$，得到 $\{\eta(t),\ \dot{\eta}(t)\}$ 属于 $V_{\sigma_1}\times V_{\sigma_1-1}$ 的有界集. 回到(26.75)，因 $f-g(u(t))$ 在 H 中一致有界，

可得$\bigcup_{t\geq 0}\{\xi(t),\ \dot{\xi}(t)\}$在$V_{\sigma_1+1}\times V_{\sigma_2}$中有界．由于嵌入$V_{s_1}\subset V_{s_2}$是紧的$(s_1>s_2)$，$\bigcup_{s\geq 0}\{\xi(t),\ \dot{\xi}(t)\}$便是$V_1\times H$中的一个紧集．

设B为E_0中的有界集．B的w极限集定义为

$$w(B)=\bigcap_{s\geq 0}\overline{\bigcup_{t\geq s}S(t)B}^{E_0}. \tag{26.79}$$

容易验证此集合具有性质：

$\varphi_0\in E_0$属于$w(B)$当且仅当存在一个序列$(t_n,\ \varphi_n)$，使得$\varphi_n\in B$，当$n\to\infty$，$t_n\to+\infty$时

$$d_{E_0}(s(t_n)\varphi_n,\ \varphi)\to 0. \tag{26.80}$$

由此可推得$w(B)$为泛函不变集，即有：

$$S(t)w(B)=w(B), \qquad \forall t\in\mathbb{R} \tag{26.81}$$

命题 5 假设

(i) $S(t)$在E_0中具有有界吸收集B_0．

(ii) 对E_0中任意有界集B，存在E_0中的一个紧集k，使

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{\varphi\in B}d_{E_0}(S(t)\varphi,\ K)=0, \tag{26.82}$$

则$\mathscr{U}=w(B_0)=\bigcap_{s\geq 0}\overline{\bigcup_{t\geq s}S(t)B_0}^{E_0}$是$S(t)$在$E_0$中的最大吸引子．

证明 从(i)，有$w(B_0)\subset B_0$．因此，$w(B_0)$在E_0中有界．从(26.82)，对$B=w(B_0)$，由(26.81)，有$w(B_0)\subset K$．因此，$w(B_0)$在E_0中闭的，也是紧的．余下来要证明对E_0中任意有界集B，有

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{\varphi\in B}d_{E_0}(S(t)\varphi,\ w(B_0))=0. \tag{26.83}$$

用反证法．对于给定的在E_0中的有界集B，如(26.83)不成立，则可找到一个序列$(t_n,\ \varphi_n)$，$\varphi_n\in B$，当$n\to\infty$时，$t_n\to+\infty$，且

$$d_{E_0}(s(t_n)\varphi_n,\ w(B_0))\geqslant\delta>0. \tag{26.84}$$

从(26.82)可知，$d_{E_0}(s(t_n)\varphi_n,\ K)\to 0$．因此，可找到$K$的点列$\{k_n\}$，使得$s(t_n)\varphi_n-k_n\to 0$(在$E_0$中)．由于$K$的紧性，能选取$\{k_{n'}\}\subset K$，当$n'\to+\infty$时，$k_{n'}\to k\in K$．由于(i)对$n'$充分大时，序列$S(t_{n'}/2)\varphi_{n'}$进入$B_0$．因$S(t_{n'}/2)S(t_{n'}/2)\varphi_{n'}\to k$．由(26.80)知$k\in w(B_0)$．这与(26.84)矛盾．命题得证．

利用命题 5, 可证:

定理 5 存在(26.70)、(26.71)在 E_0 中的最大吸引子 $\mathscr{U}$. 即对 E_0 中的任何有界集 B, 有

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{\varphi_0\in B} d_{E_0}(S(t)\varphi_0,\ \mathscr{U})=0.$$

更进一步, $\mathscr{U}$ 在 E_1 中有界.

证明 由定理 3 可知, 存在 E_0 中的有界吸收集 B_0. 因此命题 5 的假设(i)成立. 现证(ii)也成立. 事实上, 设 B 为 E_0 中的有界集, 由引理 1, 可知 E_0 中存在紧集 k, 使得

$$\bigcup_{t\geq 0} U(t)B_0\subset K. \tag{26.85}$$

现证

$$\lim_{t\to\infty} d_{E_0}(S(t)B,\ K)=0. \tag{26.86}$$

事实上, 如以 ρ 表示含有 B 的 E_0 中的一球的半径, $\psi_0\in B$. 依(26.72), 有

$$S(t)\psi_0=\Sigma_{s_0}(t)\psi_0+U(t)\psi_0. \tag{26.87}$$

由(26.13), 有

$$d_{E_0}(S(t)\psi_0,\ K)\leqslant|\Sigma_{s_0}(t)\psi_0|\leqslant\rho e^{-s_0t/2},$$

因此

$$d_{E_0}(S(t)B,\ K)\leqslant\rho e^{-s_0t/2},$$

由此推出(26.86). 于是, 由命题 5 可知 $\mathscr{U}=w(B_0)$为(26.70)、(26.71)在 E_0 中的最大吸引子. 作为(26.69)的推论, $\mathscr{U}$ 在 E_1 中有界. 事实上, 令 R_0 表示 E_0 中含有 B_0 球的半径, 且 $\varphi_0\in\mathscr{U}$. 从 $\mathscr{U}$ 对于 $s(t)$的不变性, 存在轨线 $\varphi(t)\in\mathscr{U}$, $\varphi(0)=\varphi_0$. 从(26.69)可知 $\varphi(t)\in E_1$, $\forall t\in\mathbb{R}$, $|\varphi(0)|_{E_1}\leqslant C_5(R)$, $R=|f|+R_0$.

§26.4 最大吸引子的维数

设 S 为连续映射: $X\to Y$, 使得

$$X=SX\quad 或\quad X\subset SX, \tag{26.88}$$

且 S 在 X 上是一致可微的, 即对一切 $\varphi\in X$, 存在在 Y 中的线性算子 $L=L(\varphi)\in\mathscr{L}(Y)$, 使

$$\sup_{\substack{\varphi,\psi\in X\\0<|\varphi-\psi|_X\leqslant\varepsilon}}\frac{|S\psi-S\varphi-L(\varphi)(\psi-\varphi)|_Y}{|\psi-\varphi|_Y}\to 0,\quad \varepsilon\to 0 \qquad (26.89)$$

另外，还设

$$\sup_{\varphi\in X}|L(\varphi)|_{\mathscr{L}(Y)}<+\infty. \qquad (26.90)$$

如 L 为在 Y 上的线性连续算子，引入非增序列

$$\alpha_n(L)=\operatorname*{Inf}_{\substack{\dim F=n-1\\F\subset Y}}\sup_{\substack{|\varphi|_Y=1\\\varphi\in F^\perp}}(L\varphi,\ L\varphi)^{\frac{1}{2}}. \qquad (26.91)$$

令

$$w_n(L)=\|\Lambda^n L\|_{\mathscr{L}(\Lambda^n Y)}, \qquad (26.92)$$

则由算子 L 的谱性质和古典的极大极小原理，可得到表示式

$$w_n(L)=\alpha_1(L)\cdots\alpha_n(L). \qquad (26.93)$$

如 $D=N+s$, $0<s\leqslant 1$，置

$$w_D(L)=w_N^{1-s}(L)w_{N+1}^s(L), \qquad (26.94)$$

令

$$\overline{w}_D=\sup_{\varphi\in X}w_D(L(\varphi)), \qquad (26.95)$$

利用 $\overline{w}_D$ 的表达式和豪斯多夫维数的性质，可得到如下定理：

定理 6 在前面的有关 S 和 L 的假定下，如果

（i）存在某个 $D>0$，使

$$\overline{w}_D<1, \qquad (26.96)$$

则 X 的豪斯多夫维数是有限的，且不大于 D.

（ii）存在某个 $D>0$，使得 $D=N+S$，N 为整数，$0<S\leqslant 1$，

$$(\overline{w}_{N+1})^{(D-l)/(N+1)}\overline{w}_N<1,\qquad l=1,2,\cdots,N \qquad (26.97)$$

则 X 的分形维数是有限的，且不超过 D.

利用对 $\overline{w}_D$ 的估计，可得到定理 6 的另一种形式. 置

$$\overline{w}_m(t)=\sup_{\varphi_0\in\mathscr{U}}w_m(L(t;\varphi_0)), \qquad (26.98)$$

依微分的链法则，对 $\varphi_0\in\mathscr{U}$，

$$\begin{aligned}w_m(L(t_1+t_2;\varphi_0))&=w_m(L(t_1;S(t_2)\varphi_0)\circ L(t_2;\varphi_0))\\&\leqslant w_m(L(t_1;S(t_2)\varphi_0))w_m(L(t_2;\varphi_0))\\&\leqslant\overline{w}_m(t_1)\overline{w}_m(t_2).\end{aligned}$$

上式中，我们用到了不等式

$$w_m(L_1 \cdot L_2) \leqslant w_m(L_1) w(L_2), \qquad \forall L_1、L_2 \in \mathscr{L}(Y) \tag{26.99}$$

$$w_m(L) = \| \Lambda^m L \|_{\mathscr{L}(\Lambda^m Y)},$$

因此

$$\bar{w}_m(t_1 + t_2) \leqslant \bar{w}_m(t_1) \bar{w}_m(t_2). \tag{26.100}$$

上式表明函数 $t \to \bar{w}_m(t)$ 是次指数的. 因此，存在如下极限：

$$\Pi_m \equiv \lim_{t \to +\infty} \bar{w}_m(t)^{\frac{1}{t}} = \operatorname{Inf}_{t > 0} \bar{w}_m(t)^{\frac{1}{t}} < +\infty. \tag{26.101}$$

我们再估计 Π_m. 由计算可得到 $\bar{w}_m(L(t; \varphi_0))$ 如下表达式：

$$\bar{w}_m(L(t; \varphi_0)) = \sup_{|\eta_0^i|_{E_0}=1} \operatorname{Gram}(\eta^1(t), \cdots, \eta^m(t))^{\frac{1}{2}}. \tag{26.102}$$

其中

$$\operatorname{Gram}(x^1, \cdots, x^m) = [(x^1, \cdots, x^m), (x^1, \cdots, x^m)]$$

$$= \det_{1 \leqslant i, j \leqslant m} (x^i, x^j),$$

$\eta^i(t)$（这里 $1 \leqslant i \leqslant m$）是(26.70)的变分方程

$$\dot{\eta} + A_{\varepsilon_0} \eta + \Gamma'(\varphi) \eta = 0 \tag{26.103}$$

具初值

$$\eta(0) = \eta_0 \tag{26.104}$$

的解，φ 为问题(26.70)、(26.71)的解.

对 $\varphi_0 \in E$，令 $A_{\varepsilon_0}(\varphi)$ 表示线性算子

$$A_{\varepsilon_0}(\varphi)\xi = A_{\varepsilon_0}\xi + \Gamma'(\varphi)\xi, \qquad \forall \xi \in E_0 \tag{26.105}$$

其中 φ 为问题(26.70)、(26.71)的解. 由经典的行列式求导法则，有：

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Gram}(\eta'(t), \cdots \eta^m(t))$$

$$= \frac{d}{dt}[(\eta^1, \cdots, \eta^m), (\eta', \cdots, \eta^m)]$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{m} \left[(\eta^1, \cdots, \eta^m), \left(\eta', \cdots, \frac{d\eta^k}{dt}, \cdots, \eta^m \right) \right]$$

$$= -2 \sum_{k=1}^{m} [(\eta', \cdots, \eta^m), (\eta', \cdots, A_{\varepsilon_0}(\varphi)\eta^k, \cdots, \eta^m)],$$

由于

$$\sum_{k=1}^{m}[(\eta', \cdots, \eta^m), (\eta^1, \cdots, A_{s_0}(\varphi)\eta^k, \cdots, \eta^m)]$$

$$= \operatorname{tr}(A_{s_0}(\varphi)\cdot Q_m)\cdot \operatorname{Gram}(\eta^1, \cdots, \eta^m),$$

其中 $Q_m(t)$ 表示 E_0 在 $(\eta^1(t), \cdots, \eta^m(t))$ 所张子空间上的正交投影, 因此

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Gram}(\eta^1(t), \cdots, \eta^m(t))$$

$$+2\operatorname{tr}(A_{s_0}(\varphi)\cdot Q_m(t))\operatorname{Gram}(\eta^1(t), \cdots, \eta^m(t))$$

$$=0. \tag{26.106}$$

引入数

$$q_m = -\limsup_{t\to\infty}\left\{-\operatorname*{Inf}_{\varphi_0\in\mathscr{A}}\frac{1}{t}\int_0^t \operatorname*{Inf}_{\operatorname{rank} Q=m}\operatorname{tr}(A_{s_0}(\varphi(s))\cdot Q)ds\right\}, \tag{26.107}$$

这里的 Q 表示在 E_0 上的任意正交投影, 它与 s 无关. 从(26.106)可得

$$\limsup_{t\to+\infty}\operatorname{Gram}(\eta^1(t), \eta^2(t), \cdots, \eta^m(t))^{\frac{1}{t}} \leqslant e^{-2q_m}, \tag{26.108}$$

其中我们用到了

$$|\eta_0^i|_{E_0}\leqslant 1, \qquad \operatorname{Gram}(\eta^1(0), \cdots, \eta^m(0))\leqslant 1.$$

由(26.101)、(26.102)、(26.108), 可得

$$\Pi_m \leqslant e^{-q_m}. \tag{26.109}$$

若令李雅普诺夫指数 μ_i 为

$$\mu_1 = \log \pi_1, \qquad \mu_i = \log \pi_j - \log \pi_{j-1}, \ j\geqslant 2,$$

则我们得到定理 6.

为了利用定理 6, 估计问题(26.70)、(26.71)最大吸引子的维数, 我们必须验证定理 6 的条件.

命题 6 对任何 $t_0>0$, 映射 $S(t_0)$ 在 E_0 的有界集上属于 $C^{1,\delta}$ 类(δ 为(26.54)给定). 它在 φ_0 处的微商为 E_0 上的线性算子:

$$\xi \to L(t_0, \varphi_0)\xi = \eta(t_0),$$

其中 $\eta(t_0)$ 为线性化方程

$$\dot{\eta}+A_{\varepsilon_0}\eta+\Gamma'(\varphi)\eta=0, \tag{26.110}$$

$$\eta(0)=\xi \tag{26.111}$$

的解 $\eta(t)$ 在 $t=t_0$ 的值，φ 为问题(26.70)、(26.71)的解.

证明 给定 φ_0 和 $\tilde{\varphi}_0\in E_0$，且 $|\varphi_0|_{E_0}\leqslant R$，$|\tilde{\varphi}_0|_{E_0}\leqslant R$，且 $\varphi(H)$ 和 $\tilde{\varphi}(t)$ 为(26.70)、(26.71)相应的解. 依定理 3，存在常数 $K_1(R)$，使

$$|\varphi(t)|_{E_0}\leqslant K_1(R), \quad |\tilde{\varphi}(t)|_{E_0}\leqslant K_1(R). \quad \forall t\in\mathbb{R}_+ \tag{26.112}$$

置 $\psi(t)=\varphi(t)-\tilde{\varphi}(t)$，则有

$$\dot{\psi}+A_{\varepsilon_0}\psi+\Gamma(\varphi)-\Gamma(\tilde{\varphi})=0, \tag{26.113}$$

$$\psi(0)=\varphi_0-\tilde{\varphi}_0. \tag{26.114}$$

作(26.113)和 ψ 的内积，得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\psi|^2_{E_0}+(A_e\psi,\ \psi)=(\Gamma(\tilde{\varphi})-\Gamma(\varphi),\ \psi). \tag{26.115}$$

依(26.112)和 $g(\xi)$ 满足 Lip 条件，有

$$|\Gamma(\varphi)-\Gamma(\tilde{\varphi})|_{E_0}\leqslant k|\varphi-\tilde{\varphi}|_{E_0}. \tag{26.116}$$

由(26.115)和 $(A_{\varepsilon_0}\psi,\ \psi)\geqslant 0$，易得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\psi|^2_{E_0}\leqslant k|\varphi-\tilde{\varphi}|^2_{E_0}=k|\psi|^2_{E_0}.$$

因此，

$$|\varphi(t)-\tilde{\varphi}(t)|\leqslant e^{kt_0}|\varphi_0-\tilde{\varphi}_0|. \quad 0\leqslant t\leqslant t_0 \tag{26.117}$$

设 $\eta\in(\mathbb{R}_+;E_0)$ 为(26.110)、(26.111)的解. 置

$$\theta(t)=\varphi(t)-\tilde{\varphi}(t)-\eta(t), \tag{26.118}$$

其中 $\tilde{\varphi}_0=\varphi_0+\xi$，$\xi\in E_0$，则函数 $\theta(t)$ 满足 $\theta(0)=0$ 和

$$\dot{\theta}+A_{\varepsilon_0}\theta+\Gamma'(\varphi)\theta=\zeta, \tag{26.119}$$

其中

$$\zeta=\Gamma(\varphi)-\Gamma(\tilde{\varphi})-\Gamma'(\varphi)(\varphi-\tilde{\varphi}). \tag{26.120}$$

改写 ζ 为

$$\zeta=\int_0^1\{\Gamma'(\tau\tilde{\varphi}+(1-\tau)\varphi)-\Gamma'(\varphi)\}(\varphi-\tilde{\varphi})d\tau,$$

由(26.53)和(26.112)，存在常数 $C_2=C_2(R)$，使

$$|\Gamma'(\tau\tilde{\varphi}+(1-\tau)\varphi)-\Gamma'(\varphi)|_{\mathscr{L}(E_0)}\leqslant C_2\tau^\delta|\varphi-\tilde{\varphi}|^\delta,$$

因此

$$|\zeta|_{E_0}\leqslant C_2'|\varphi-\tilde{\varphi}|^{1+\delta}. \tag{26.121}$$

在 E_0 中作(26.119)与 θ 的内积，得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\theta|^2+(A_\varepsilon\theta,\ \theta)+(\Gamma'(\varphi)\theta,\ Q)=(\zeta,\ \theta).$$

由于存在常数 $C>0$，使

$$|\Gamma'(\varphi(t))|_{\mathscr{L}(E_0)}\leqslant\frac{C}{2},$$

以及(26.117)～(26.121)，可得

$$\frac{d}{dt}|\theta|_{E_0}^2\leqslant C|\theta|_{E_0}^2+C_2'e^{2(1+\delta)kt_0}|\xi|_{E_0}^{2+2\delta}, \qquad 0\leqslant t\leqslant t_0 \tag{26.122}$$

由格隆沃尔不等式及 $\theta(0)=0$，可得

$$|\theta(t_0)|_{E_0}^2\leqslant\frac{e^{Ct_0}-1}{C}C_2'e^{2(1+\delta)kt_0}|\xi|_{E_0}^{2+2\delta}, \tag{26.123}$$

命题得证.

现验证(26.89)成立. 事实上，给定 φ 和 $\psi\in\mathscr{U}$，记 $S=S(t_0)$，$L(\varphi)=L(t_0,\ \varphi)$，则

$$\begin{aligned}&S\psi-S\varphi-L(\varphi)(\psi-\varphi)\\&=\int_0^1\{L(\theta\psi+(1-\theta)\varphi)-L(\varphi)\}(\psi-\varphi)d\theta.\end{aligned}$$

因 $\mathscr{U}$ 在 E_0 中有界，依命题 6，存在常数 C，使

$$\begin{aligned}&|L(\theta\psi+(1-\theta)\varphi)-L(\varphi)|_{E_0}\\&\leqslant|\theta\psi+(1-\theta)\varphi-\varphi|_{E_0}^\delta\leqslant C|\psi-\varphi|_{E_0}^\delta,\end{aligned}$$

这就证明了

$$\frac{|S\psi-S\varphi-L(\varphi)(\psi-\varphi)|_{E_0}}{|\psi-\varphi|_{E_0}}\leqslant C|\psi-\varphi|_{E_0}^\delta,$$

由此推出(26.89).

我们可得到如下定理.

定理 7 问题(26.70)、(26.71)的最大吸引子具有有限的分形和豪斯多夫维数.

证明 应用定理 3, q_m 由(16.107)所定义. 令 Q 为在 E_0 中任意秩为 m 的正交投影, $(\xi^i)_{i\in\mathbb{N}}$ 为 E_0 中的完全正交组, 使

$$\operatorname{span}\{\xi^1, \xi^2, \cdots, \xi^m\}=QE_0.$$

对于 φ_0 给定在 $\mathscr{U}$ 中, $\varphi(t)$ 表示问题(26.70)、(26.71)的解. 依(16.105), 有

$$\operatorname{tr}A_{\varepsilon_0}(\varphi)_0 Q=\sum_{i=1}^{m}\{(A_{\varepsilon_0}\xi^i, \xi^i)_{E_0}+(\Gamma'(\varphi)\xi^i, \xi^i)_{E_0}\}. \tag{26.124}$$

记 $\xi^i=\{\varphi^i, \psi^i\}\in V_1\times H=E_0$, 于是有

$$\begin{aligned}(A_{\varepsilon_0}\xi^i, \xi^i)_{E_0}&+(\Gamma'(\varphi)\xi^i, \xi^i)_{E_0}\\ &=\varepsilon_0|\varphi^i|^2_{E_0}+\varepsilon_0(\varepsilon_0-\alpha)(\varphi^i, \psi^i)\\ &\quad+(\alpha-\varepsilon_0)|\psi^i|^2+(g'(u)\varphi^i, \psi^i).\end{aligned} \tag{26.125}$$

由于 $\mathscr{U}$ 在 E_0 中有界, $\varphi(t)=\{u(t), \dot{u}(t)+\varepsilon u(t)\}\in\mathscr{U}$, $\forall t\in\mathbb{R}$, 从(26.59), 存在 $s\in[0, 1]$, 使

$$\sup_{\varphi_0\in\mathscr{U},\, t\geq 0}\sup|g'(u(t))|_{\mathscr{L}(V_s,H)}\equiv\beta<+\infty. \tag{26.126}$$

由(26.8)、(26.124)、(26.125)、(26.126), 得

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A_{\varepsilon_0}(\varphi)\cdot Q)&\geq\sum_{i=1}^{m}\left\{\frac{\varepsilon_0}{2}(|\varphi^i|_1^2+|\psi^i|^2)-\beta|\varphi^i|_s|\psi^i|\right\}\\ &\geq\sum_{i=1}^{m}\left\{\frac{\varepsilon_0}{4}(|\varphi^i|_1^2+|\psi^i|^2)\right\}-\frac{\beta^2}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{m}|\varphi^i|_s^2.\end{aligned} \tag{26.127}$$

由于$\{\xi^i\}$在 E_0 中正交, (26.127)右端第一项等于 $\frac{\varepsilon_0}{4}m$, 第二项为 $-\frac{\beta^2}{\varepsilon_0}\operatorname{tr}(M\cdot Q)$, 其中 $M\in\mathscr{L}(E_0)$, $M\{\varphi, \psi\}=\{A^{s-1}\varphi, 0\}$, 因此(26.127)推出

$$\operatorname{tr}(A_{\varepsilon_0}(\varphi), \theta)\geq\frac{\varepsilon_0}{4}m-\frac{\beta^2}{\varepsilon_0}\operatorname{tr}(M\cdot Q). \tag{26.128}$$

$M\cdot Q$ 的迹能用特征值来估计, M 的特征值为 $\{\lambda_j^{s-1}\}_{j\geq 1}\cup\{0\}$, 其中 $0\leq\lambda_1\leq\cdots\leq\lambda_j\leq\cdots$ 为 A 的特征值,

$$\mathrm{tr}(M\cdot Q)\leqslant\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^{s-1}. \tag{26.129}$$

由此，(26.124)有

$$\mathrm{tr}(A_{\varepsilon_0}(\varphi)\cdot\theta)\geqslant m\left(\frac{\varepsilon_0}{4}-\frac{\beta^2}{\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^{s-1}\right). \tag{26.130}$$

(26.130)的右端不依赖于 $\varphi_0\in\mathscr{U}$ 和 t，因此

$$q_m\geqslant m\left(\frac{\varepsilon_0}{4}-\frac{\beta^2}{\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^{s-1}\right). \tag{26.131}$$

从 A^{-1} 的紧性可知 $\lim\limits_{i\to\infty}\dfrac{1}{\lambda_i}=0$. 因此 Cesaro 平均

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^{s-1}\to 0\quad(m\to\infty),$$

存在 $m^*\geqslant 1$，使

$$\frac{1}{m^*}\sum_{i=1}^{m^*}\lambda_i^{s-1}<\frac{\varepsilon_0}{4}. \tag{26.132}$$

依(26.131)，有 $q_{m^*}>0$. 因此，$\mathscr{U}$ 的分形维数和豪斯多夫维数均为有限. 定理证毕.

§ 26.5 应　　用

现举几个具体例子，作为 § 26.3、§ 26.4 理论结果的应用.

(1) 非线性波动方程

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,\ t)+\alpha\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u+g(u)=f(x),\ \ \Omega\times\mathbb{R}_+ \tag{26.133}$$

及初边值条件

$$u(x,\ t)=0,\ \ \partial\Omega\times\mathbb{R}_+, \tag{26.134}$$

$$u(x,\ 0)=u_0(x),\ \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0)=u_1(x), \tag{26.135}$$

其中 $\alpha>0$，$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为有界区域，$g(u)\in C^1$: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，且满足假设(26.31)～(26.33)，f、u_0、u_1 分别给定在 $L^2(\Omega)$、$H_0^1(\Omega)$、$L^2(\Omega)$. 当 $g(u)=\sin u$ 时，(26.133)为正弦-戈登方程；当 $g(u)=|u|^{\gamma}u$，$\gamma\geqslant 0\ (n=1,\ 2)$，$0\leqslant\gamma<2\ (n=3)$，(26.133)为量子力学中的非线

性波动方程.

依定理 1，可知问题(26.133)～(26.135) 具有唯一解 $\{u, \dot{u}\}$ $\in C_b(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega))$. 由 § 26.3 和 § 26.4 的结果，可知问题(26.133)、(26.134)、(26.135)在 $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$中存在一个最大吸引子 $\mathscr{U}$. 即 $\mathscr{U}$ 是紧集，它吸引所有在 $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 中的有界集所形成的流的轨线. 且如果 f、g、$\Omega\in C^\infty$，则集合 $\mathscr{U}\in C^\infty(\overline{\Omega})\times C^\infty(\overline{\Omega})$.

定理 8 存在在 $\{H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\}\times H_0^1(\Omega)$ 中的有界集 $\mathscr{U}$，它仅依赖于 g、f α 和 Ω，使

（i）$\mathscr{U}$ 具有有限分形维数.

（ii）对于初值 $\{u_0, u_1\}$ 在 $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$中的任何有界集，对应于这些初值的问题(26.133)～(26.135)的解集 $\{u, \dot{u}\}$，当 $t\to\infty$ 时依 $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$模收敛于 $\mathscr{U}$.

证明 上述结果来自定理 5 和定理 6. 我们需要验证这些定理的一切假设，如(26.53)～(26.59)和(26.68)、(26.69). 假设(26.53)～(26.58)已在定理 1 和定理 2 中验证过. 关于(26.59)，令 $\xi\in D(A)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，映射 $u\to\int_\Omega g(u(x))dx$ 的微商为算子

$$\eta\to\int_\Omega g'(\xi)\eta dx.$$

它作为在 $H=L^2(\Omega)$的线性算子的模，囿于 $|g'(\xi)|_{L^\infty(\Omega)}$. 由于(26.33)，当 $n\geqslant 4$ 时(26.59)显然真；而当 $n\leqslant 3$ 时，则(26.59)可由 $H^2(\Omega)\hookrightarrow L^\infty(\Omega)$推得. 现证(23.68)和(26.69). 仅考虑 $n=3$，其他情况容易证明. 由古典的索伯列夫嵌入关系式

$$(n=3)\quad H^s(\Omega)\hookrightarrow L^{\frac{6}{(3-2s)}}(\Omega),\qquad 0\leqslant s<\frac{3}{2}\quad (26.136)$$

$$(n=3)\quad H^s(\Omega)\hookrightarrow L^\infty(\Omega)\qquad\qquad s>\frac{3}{2}\quad (23.137)$$

给定 $\xi\in V_1=H_0^1(\Omega)$，$|\xi|_1\leqslant R$. 从(26.136)、$s=1$ 和(23.33)，可知存在 $C_6(R)$，使 $|g'(\xi)|_{L^{\gamma}(\Omega)}\leqslant C_6(R)$. 现证(26.68)，$\sigma_2=$

$(2-r)/2$. 事实上，我们知道 $V_{\sigma_2-1}\subset H^{\sigma_2-1}\subset L^{\frac{6}{1+2\sigma_2}}(\Omega)$，因

$$\frac{r}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1+2\sigma_2}{6}=1,$$

由赫尔德不等式，对一切 $\eta\in L^2(\Omega)$，$\theta\in V_{\sigma_2-1}$，有

$$\left|\int_\Omega g'(\xi)\eta\theta\,dx\right|$$
$$\leqslant\left(\int_\Omega|g'(\xi)|^{\frac{6}{r}}d\xi\right)^{\frac{r}{6}}\left(\int_\Omega|\eta|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega|\theta|^{\frac{6}{1+2\sigma_2}}\right)^{\frac{1+2\sigma_2}{6}},$$

这就证明了(26.68)。

关于(26.69)的证明，考虑线性方程

$$\ddot{\xi}+\alpha\dot{\xi}+A\xi=h, \tag{26.138}$$

其中 $h\in C_b(\mathbb{R};V_{-1+\delta})$. $0\leqslant\delta\leqslant1$，如 ξ，$\{\xi,\dot{\xi}\}\in C_b(\mathbb{R},H\times V_{-1})$ 为(26.138)的解，则

$$\{\xi,\dot{\xi}\}\in C_b(\mathbb{R},V_\delta\times V_{-1+\delta}). \tag{26.139}$$

$\{\xi,\dot{\xi}\}$ 的模仅依赖于 h 在 $C_b(\mathbb{R},V_{-1+\delta})$ 中的模，现回到(26.69)。设 f 给定在 $C_b(\mathbb{R},H)$，$\dot{f}\in C_b(\mathbb{R},H)$，且

$$\{u,\dot{u}\}\in C_b(\mathbb{R},V_1\times H) \tag{26.140}$$

为(26.60)的解，我们有

$$\ddot{u}+\alpha\dot{u}+Au=f-g(u).$$

令 $\xi=\dot{u}$，则有

$$\ddot{\xi}+\alpha\dot{\xi}+A\xi=\dot{f}-g'(u)\dot{u}. \tag{26.141}$$

依(26.68)和(26.143)，函数

$$\dot{f}-g'(u)\dot{u}\in C_b(\mathbb{R},V_{-1+\sigma_2}),\qquad\sigma_2=\frac{2-r}{2}.$$

从(26.139)可知 $\{\ddot{u},\dot{u}\}\in C_b(\mathbb{R},V_{\sigma_2}\times V_{-1+\sigma_2})$. 因

$$Au=f-g(u)-\ddot{u}-\alpha\dot{u}\in C_b(\mathbb{R},V_{-1+\sigma_2}),$$

有

$$\{u,\dot{u}\}\in C_b(\mathbb{R},V_{1+\sigma_2}\times V_{\sigma_2}), \tag{26.142}$$

且 $\{u,\dot{u}\}$ 在 $C_b(\mathbb{R},V_{1+\sigma_2}\times V_{\sigma_2})$ 中的模囿于 $|f|_{L^\infty(\mathbb{R},H)}+|\dot{f}|_{L^\infty(\mathbb{R},H)}+|\{u,\dot{u}\}|_{L^\infty(\mathbb{R},E_0)}$ 的有界函数. 如 $1+\sigma_2>\frac{3}{2}$（即 $0<r<1$），依

(26.137)和 $V_{1+\sigma_2}\subset H^{1+\sigma_2}(\Omega)$，有

$$u\in C_b(\mathbb{R},\ L^\infty(\Omega)). \tag{26.143}$$

则 $g'(u)\in C_b(\mathbb{R},\ L^\infty(\Omega))$，$h=\dot{f}-g'(u)\dot{u}\in C_b(\mathbb{R},\ H)$. 因此，由(26.141)和(26.139)，有 $(\ddot{u},\ \dot{u})\in C_b(\mathbb{R},\ V_1\times H)$. 推出 $u\in C_b(\mathbb{R},\ V_2)$. (26.69) 得证. 如 $1+\sigma_2\leqslant\dfrac{3}{2}$（即 $1\leqslant r<2$），可用靴带技巧来证明. 设 $\{u,\dot{u}\}\in C_b(\mathbb{R},\ V_{1+\delta}\times V_\delta)$，$0\leqslant\delta<\dfrac{1}{2}$. 依(26.136)和 $V_{1+\delta}\subset H^{1+\delta}(\Omega)$，有 $u\in C_b(\mathbb{R},\ L^{\frac{6}{1-2\delta}}(\Omega))$. 因此，由(26.33)，$g'(u)\in C_b(\mathbb{R},\ L^{\frac{6}{(1-2\delta)r}}(\Omega))$. 另一方面，$\dot{u}\in C_b(\mathbb{R},\ L^{\frac{6}{3-\delta}}(\Omega))$. 因此，

$$g'(u)\dot{u}\in C_b(\mathbb{R},\ V_s),\qquad s=\frac{\delta-(1-2\delta)r}{2}.$$

如 $s\geqslant 0$，$h=\dot{f}-g'(u)\dot{u}\in C_b(\mathbb{R},\ H)$，则结论是显然的. 如 $s<0$，$h\in C_b(\mathbb{R},\ V_s)$，由(26.139)，$\{u,\dot{u}\}\in C_b(\mathbb{R},\ V_{1+s}\times V_s)$，$u\in C_b(\mathbb{R},\ V_{2+s})$. 如 $2+s>\dfrac{3}{2}$，则由(26.137)可得(26.143)，从而得到我们的结论. 反之，再重复这个过程，现证明这个过程在有限步即终止. 事实上，设第 n 步开始 $\{u,\ \dot{u}\}\in C_b(\mathbb{R},\ V_{1+\delta_n}\times V_{\delta_n})$，下步为 $\{u,\ \dot{u}\}\in C_b(\mathbb{R},\ V_{1+\delta_{n+1}}\times V_{\delta_{n+1}})$，其中

$$1+\delta_{n+1}=2+\frac{\delta_n-(1-2\delta_n)r}{2},$$

$$S_{n+1}=\frac{1+2r}{2}\delta_n+\frac{2-r}{2}.$$

因 $1\leqslant r<2$，$\delta_n\to+\infty$，则存在整数 n_0，使得 $\delta_{n_0}>\dfrac{1}{2}$. 于是(26.137)、(26.143)满足. 这就证明了(26.69).

定理证毕.

(2) 各种正弦-戈登方程(方程组)初边值问题

（1）具第二边值条件的正弦-戈登方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}+\alpha u_t-\Delta u+u+\sin u=f(x), & (26.144)\\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,\ t)=0, \qquad \partial\Omega\times\mathbb{R} & (26.145)\\ u(x,\ 0)=u_0(x),\quad u_t(x,\ 0)=u_1(x), & (26.146)\end{cases}$$

其中 Ω 为有界区域; $\partial\Omega$ 光滑; ν 为 $\partial\Omega$ 的外法向量. $f\in L^2(\Omega)$. 其泛函框架为:

$$H=L^2(\Omega),\quad D(A)=\left\{\xi\in H^2(\Omega),\ \frac{\partial\xi}{\partial\nu}=0,\ x\in\partial\Omega\right\},$$

$$A\xi=-\Delta\xi+\xi,\quad g(\xi)=\sin\xi,$$

$$G(\xi)=\int_\Omega(\cos\xi-1)dx,\quad p\equiv 0.$$

于是, 可用上述定理进行讨论.

(ii) 正弦-戈登方程组

$$\begin{cases} u_{1tt}+u_{1t}-\triangle u_1+\sin u_1+h(u_1-u_2)=f_1, & (26.147)\\ u_{2tt}+u_{2t}-\triangle u_2+\sin u_2+h(u_2-u_1)=f_1, & (26.148)\\ u_i(x,\ t)=0, \qquad x\in\partial\Omega,\ t\geqslant 0,\ i=1,\ 2 & (26.149)\\ u_i(x,\ 0)=u_{0i}(x),\ \dfrac{\partial u_i}{\partial t}(x,0)=u_{1i}(x).\ x\in\Omega & (26.150)\end{cases}$$

取 $H=L^2(\Omega)^2$, $D(A)=\{(\xi_1,\ \xi_2)\in H^2(\Omega)^2,\ \xi_i=0,\ \partial\Omega\}$,

$$A(\xi_1,\ \xi_2)=(-\Delta\xi_1,\ -\triangle\xi_2),$$

$$g(\xi_1,\ \xi_2)=(\sin\xi_1+h(\xi_1-\xi_2),\ \sin\xi_2+h(\xi_1-\xi_2)),$$

$$G(\xi_1,\ \xi_2)=\int_\Omega\left\{\cos\xi_1+\cos\xi_2-2+\frac{h}{2}(\xi_1-\xi_2)^2dx\right\},\ p\equiv 0.$$

(iii) 非梯度型正弦-戈登方程组

$$\begin{cases} u_{1tt}+u_{1t}-\triangle u_1+\sin(u_1+u_2)=f_1,\\ u_{2tt}+u_{2t}-\triangle u_2+\sin(u_1-u_2)=f_2.\end{cases} \quad (26.151)$$

取 $$A(\xi_1,\xi_2)=\left(-\triangle\xi_1-\frac{\lambda_1}{2}\xi_1,\ -\triangle\xi_2-\frac{\lambda_1}{2}\xi_2\right),$$

其中 λ_1 是 $-\triangle$ 具狄利克雷(P.G. Dirichlet)边界条件的第一特征值.

$$g(\xi_1,\ \xi_2)=\left(\frac{\lambda_1}{2}\xi_1,\ \frac{\lambda_1}{2}\xi_2\right),$$

$$G(\xi_1,\ \xi_2)=\frac{\lambda_1}{4}\int_\Omega(\xi_1^2+\xi_2^2)dx,$$

$$p(\xi_1,\ \xi_2)=(\sin(\xi_1+\xi_2),\ \sin(\xi_1-\xi_2)).$$

(iv)

$$\begin{cases}u_{tt}+\alpha u_t+\Delta^2u+|u|^r u=f, & (26.152)\\ u(x,\ t)=\dfrac{\partial u}{\partial r}(x,\ t)=0, \qquad \partial\Omega\times\mathbb{R}_+ & (26.153)\\ u(x,\ 0)=u_0(x),\ u_t(x,\ 0)=u_1(x),\ x\in\Omega & (26.154)\end{cases}$$

其中 $\sigma>0$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n\leqslant3$. 取

$$H=L^2(\Omega),$$

$$D(A)=H^4(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)=\left\{\xi\in H^4(\Omega),\ \xi=\frac{\partial\xi}{\partial\nu}=0,\ \partial\Omega\right\}$$

$$g(\xi)=|\xi|^r\xi,\ G(\xi)=\frac{1}{r+2}\int_\Omega|\xi|^{r+2}dx,\ p\equiv0.$$

(v)

$$u_{tt}+\alpha u_t+u_{xxxx}+u+g(u)=f, \qquad (26.155)$$

$$u(x+L,\ t)=u(x,\ t), \qquad x\in\mathbb{R},\ t\geqslant0 \qquad (26.156)$$

$$u(x,\ 0)=u_0(x),\ u_t(x,\ 0)=u_1(x), \qquad (26.157)$$

其中非线性算子定义如下: 设 ξ_k 表示 ξ 的傅里叶系数, 即

$$\xi(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\xi_k\exp\left(2i\pi k\frac{x}{L}\right). \qquad (26.158)$$

置

$$g(\xi)_k=(\sum_{l\in\mathbb{Z}}|l|^\sigma|\xi_l|^2)^\delta|k|^{2\sigma}\xi_k, \qquad (26.159)$$

如以 D 表示 $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$, 则算子 g 正比于 $\xi\to\int_0^L(|D^\sigma\xi|^2)^\delta D^{2\sigma}\xi$. 引入

$$G(\xi)=\frac{1}{\delta+2}(\sum_{l\in\mathbb{Z}}|l|^\sigma|\xi_l|^2)^\delta, \qquad (26.160)$$

其中 ξ_l 在(26.158)中给出. 当

$$0\leqslant\sigma<1 \qquad (26.161)$$

时，问题(26.155)～(26.157)能用抽象框架处理，其中

$$H=L^2(0,\ L),\qquad D(A)=H^4_{per}(0,\ L),$$

$$Au=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+u,\qquad p\equiv 0.$$

当 $\sigma=1$ 代替 $0\leqslant\sigma<1$ 时，这是有意义的模型。

§26.6 非自治方程

设 f 在 $C_b(\mathbb{R},\ H)$ 中给定，$\dot{f}\in C_b(\mathbb{R},\ H)$. 设存在 $T>0$，使

$$f(t+T)=f(t). \qquad \forall t\in\mathbb{R} \quad (26.162)$$

引入一族算子 $\{S(t,\ s)\}$ 如下：$(t,\ s\in\mathbb{R})$

给定 $\varphi_0\in E$，设

$$\varphi(t)=S(t,\ s)\varphi_0, \qquad t\in\mathbb{R},\ s\in\mathbb{R} \quad (26.163)$$

其中 $\varphi(t)$ 为柯西问题

$$\dot{\varphi}(\tau)+A_{s_0}\varphi(\tau)+\Gamma(\varphi(\tau))=\mathscr{F}(\tau),\ \tau\in\mathbb{R} \quad (26.164)$$

$$\varphi(s)=\varphi_0 \quad (26.165)$$

的解，其中 $\mathscr{F}(\tau)=\{0,\ f(t)\}$. 由命题1，可知问题(26.164)、(26.165)可解，$S(t,\ s)\in C(E_0,\ E_0)$. 另外，由问题(26.164)、(23.165)的解的唯一性，有

$$S(t,\ t)=id_{E_0}, \qquad \forall t\in\mathbb{R} \quad (26.166)$$

$$S(t_1,\ t)S(t,\ t_2)=S(t_1,\ t_2).\ \forall t_1、t_2、t\in\mathbb{R} \quad (26.167)$$

由周期条件，有

$$S(t+T,\ S+T)=S(t,\ s). \qquad \forall t、s\in\mathbb{R} \quad (26.168)$$

因此，族 $\{S(nT,\ 0)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 形成一离散群。

置

$$S(nT)\equiv S(nT,\ 0). \qquad \forall n\in\mathbb{Z} \quad (26.169)$$

对于 $\{S(nT)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 的泛函不变集为 E_0 的子集 X，满足

$$S(nT)X=X. \qquad \forall n\in\mathbb{Z} \quad (26.170)$$

最大吸引子 $\mathscr{U}$ 是在 E_0 中的紧的泛函不变集，它吸引 E_0 中的每个有界子集，即对固定 t、$s\in\mathbb{R}$，在 E_0 中任何有界集映射 $S(t+$

$mT, S)$的象当 $m\to+\infty$ 时收敛于 $S(t, 0)\mathscr{U}$.

给定一有界集 $B\subset E_0$, w 极限集定义为

$$w_p(B)=\bigcap_{m\geqslant 0}\overline{\bigcup_{n\geqslant m}S(nT)B}^{E_0}. \tag{26.171}$$

它有如下特征: $\varphi\in E_0$ 属于 $w_p(B)$, 当且仅当存在序列(N_n, φ_n)使 $N_n\in\mathbb{Z}$, $\varphi_n\in B$, 且当 $n\to\infty$ 时, $N_n\to+\infty$, 且

$$d_{E_0}(S(N_n, T)\varphi_n, \varphi)\to 0.$$

我们有

$$S(nT)w_p(B)=w_p(B), \qquad \forall n\in\mathbb{Z} \tag{26.172}$$

定理 9 设

(i) $S(t, 0)$具有在 E_0 中的有界吸收集 B_0,

(ii) 对于 E_0 中的有界集, 存在紧集 $K\subset E_0$, 使

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{\varphi\in B}d_{E_0}(S(t, 0)\varphi, K)=0. \tag{26.173}$$

则有: (a)集合

$$\mathscr{U}=w_P(B_0) \tag{26.174}$$

含于 E_1 中, 它是问题(26.164)、(26.165)在 E_0 中的最大吸引子. 对任何 E_0 中的有界集, t、$s\in\mathbb{R}$, 有

$$\lim_{m\to+\infty}\sup_{\varphi_0\in B}d_{E_0}(S(t+mT; S)\varphi_0, S(t; 0)\mathscr{U})=0. \tag{26.175}$$

(b) 最大吸引子 $\mathscr{U}$ 具有有限的分形维数.

证明 由(i)、(ii)几乎等同于命题 5 及其证明, 可得(a). 对于(b), 由(26.170)和 26.4 的分析, 用离散群 $\{S(nT)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 代替连续群$\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, $t=nT$, $n\to+\infty$ 代替 $t\to+\infty$ 即得.

现以具强迫力的正弦-戈登方程为例.

$$u_{tt}+\alpha u_t-u_{xx}+\sin u=\Gamma\sin\omega t, \qquad x\in[0, l], \ t>0 \tag{26.176}$$

$$u(0, t)=u(L, t)=0, \qquad t\geqslant 0 \tag{26.177}$$

$$\left.\begin{aligned}&u(x, 0)=u_0(x),\\&u_t(x, 0)=u_1(x),\end{aligned}\right\} \qquad x\in[0, L] \tag{26.178}$$

其中 $\alpha>0$, $L>0$, $\Gamma\neq 0$, $\infty\neq 0$. 显然，周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$. 将定理 9 应用于问题(26.176)~(26.178)，有

定理 10 存在一有界集 $\mathscr{U}$ 在 $H^2(0, L)\times H^1(0, L)$，它仅依赖于 α、L、Γ 和 ω，使

(i) 对初值 $\{u_0, u_1\}\in H_0^1(0, L)\times L^2(0, L)$ 的任何有界集及其对应的问题(26.176)—(26.178)的解是 $\{u, u_t\}$，它当 $t\to+\infty$ 时依模($H_0^1(0, L)\times L^2(0, L)$ 的模)收敛于 $\mathscr{U}$.

(ii) $\mathscr{U}$ 的豪斯多夫维数小于

$$1+\frac{3L^2}{3\varepsilon_0^2},\quad \text{其中 } \varepsilon_0=\min\left(\frac{\alpha}{4},\ \frac{\pi^2}{2\alpha L^2}\right). \tag{26.179}$$

(iii) 它的分形维数小于

$$2\left(1+\frac{4L^2}{3\varepsilon_0^2}\right). \tag{26.180}$$

证明 当 $g(u)=\sin u$, $\Omega=[0, L]$ 时，问题(26.176)—(26.178)回到问题(26.133)—(26.135). 为了证明定理中的(i)，应用定理 9. 定理 9 的假设(i)、(ii)由 26.5 可知当自治情况时是成立的. 至于 $f(x, t)$ 满足 $f(x, t)\in C_b(\mathbb{R}; H)$, $f_t(x, t)\in C_b(\mathbb{R}_+; H)$, $H=L^2(0, L)$，因 $f(x, t)=\Gamma\sin\omega t$，即知满足. 因此，最大吸引子是存在的. 现考虑它的维数估计. 设

$$\lambda_j=j^2\frac{\pi^2}{L^2}\qquad j=1, 2, \cdots \tag{26.181}$$

为算子 $Au=-u_{xx}$ 是狄利克雷边界问题的特征值. 因 $\lambda_1=\dfrac{\pi^2}{L^2}$. ε_0 如命题 1 中为

$$\varepsilon_0=\min\left(\frac{\alpha}{4},\ \frac{\pi^2}{2\alpha L^2}\right). \tag{26.182}$$

现考察(26.59)当 $S=0$ 是满足的. 因 $g'(\xi)\varphi=\varphi\cos\varphi$，有

$$|g'(\xi)|_{\mathscr{L}(L^2(0,L))}=\sup_{\int_0^L\varphi^2dx=1}\int_0^1\varphi^2(x)\cos^2\xi x\,dx\leqslant 1.$$

因此，在(26.126)中，

$$\beta=1. \tag{26.183}$$

从(26.131)，可得

$$q_m \geqslant m\left(\frac{\varepsilon_0}{4}-\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{L^2}{j^2\pi^2}\right). \tag{26.184}$$

因
$$\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j^2}\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}=\frac{\pi^2}{6},$$

$$q_m \geqslant m\left(\frac{\varepsilon_0}{4}-\frac{L^2}{6m\varepsilon_0}\right), \tag{26.185}$$

因此，如 $m>2L^2/3\varepsilon_0^2$，依 $q_{m+1}>0$，得(26.179)。

关于分形维数，令 m_0 使得

$$m_0-1<\frac{4L^2}{3\varepsilon_0^2}\leqslant m_0.$$

从(26.185)对 $m=1,\ \cdots,\ m_0$，有

$$-\frac{q_m}{q_{m_0}}\leqslant\frac{\left(\frac{L^2}{6}\varepsilon_0-\frac{m\varepsilon_0}{4}\right)}{\left(\frac{\varepsilon_0 m_0}{4}-\frac{L^2}{6\varepsilon_0}\right)}\leqslant\frac{\frac{L^2}{6\varepsilon_0}}{\frac{L^2}{3\varepsilon_0}-\frac{L^2}{6\varepsilon_0}}=1.$$

因此
$$m_0\max_{1\leqslant m\leqslant m_0}\left(1-\frac{q_m}{q_{m_0}}\right)\leqslant 2m_0\leqslant 2\left(1+\frac{4L^2}{3\varepsilon_0^2}\right).$$

由关于维数估计的一般定理，得(26.180)。

§ 27　一类非线性演化方程的惯性流形

在希尔伯特空间 H 上给定内积$(\cdot,\ \cdot)$，非线性演化方程具形式

$$\frac{du}{dt}+Au+R(u)=0, \tag{27.1}$$

其中

$$R(u)=B(u,\ u)+Cu-f, \tag{27.2}$$

A 是 H 上线性无界自共轭算子，$D(A)$在 H 中稠．设 A 是正的，即

$$(Av, v)>0. \qquad \forall v\in D(A), \quad v\neq 0$$

A^{-1} 是紧的，映射 $u\to Au$ 是从 $D(A)$ 到 H 的同构. A^s 表示 A 的 s 次幂($s\in\mathbb{R}$). 空间 $V_{2s}=D(A^s)$是希尔伯特空间，具有内积

$$(u, v)_{2s}=(A^s u, A^s v), \qquad \forall u、v\in D(A^s)$$

$u\in V_s$，令 $\|u\|_s=(u, u)_s^{\frac{1}{2}}$.

因 A^{-1} 是紧的和自共轭的，则存在 H 的正交基 $\{w_j\}$，由 A 的特征向量组成，

$$Aw_j=\lambda_j w_j. \tag{27.3}$$

特征值满足

$$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots, \qquad \lambda_j\to+\infty, \quad j\to\infty \tag{27.4}$$

从(27.3)、(27.4)易得

$$|A^{\frac{1}{2}}u|\geqslant\lambda_1^{\frac{1}{2}}|u|, \qquad u\in D(A^{\frac{1}{2}}) \tag{27.5}$$

$$|A^{p+\frac{1}{2}}u|\geqslant\lambda_1^{\frac{1}{2}}|A^p u|. \quad \forall u\in D(A^{p+\frac{1}{2}}), \quad \forall p \tag{27.6}$$

令 p_N 是 H 在 $\{w_1, \cdots, w_N\}$ 所成子空间的正交投影($N=1, 2, \cdots$), $Q_N=I-p_N$. 在(27.2)中的非线性项 $R(u)$、$B(u, u)$ 为双线性算子 $D(A)\times D(A)\to H$，C 是 $D(A)$到 H 的线性算子，$f\in D(A^{\frac{1}{2}})$. 进一步，设

$$(B(u, v), v)=0, \qquad \forall u、v\in D(A) \tag{27.7}$$

$$|B(u, v)|\leqslant C_1|u|^{\frac{1}{2}}|A^{\frac{1}{2}}u|^{\frac{1}{2}}|A^{\frac{1}{2}}v|^{\frac{1}{2}}|Av|^{\frac{1}{2}},$$

$$\forall u、v\in D(A) \tag{27.8}$$

$$|Cu|\leqslant C_2|A^{\frac{1}{2}}u|^{\frac{1}{2}}|Au|^{\frac{1}{2}}, \qquad \forall u\in D(A) \tag{27.9}$$

其中 C_1、C_2 和下面的 $C_i(i=3, 4)$均为正常数. 对 B、C，附加如下连续性质

$$|A^{\frac{1}{2}}B(u, v)|\leqslant C_3|Au||Av|, \ \forall u、v\in D(A) \tag{27.10}$$

$$|A^{\frac{1}{2}}Cu|\leqslant C_4|Au|. \qquad \forall u\in D(A) \tag{27.11}$$

最后，设 $A+C$ 是正的，即有

$$((A+C)u, u)\geqslant\alpha|A^{\frac{1}{2}}u|^2, \quad \forall u\in D(A),\ \alpha>0 \qquad (27.12)$$

考虑(27.1)的初值问题，即(27.1)满足初始条件

$$u(0)=u_0\in H. \qquad (27.13)$$

设问题(27.11)、(27.13)具有唯一解 $S(t)u_0$, $\forall t\in\mathbb{R}^+$, $S(t)u_0\in D(A)$, $\forall t\in\mathbb{R}^+$. 映射 $S(t)$ 具有通常的半群性质.

我们现对方程(27.1)的解作一致先验估计. 为此，需要如下不等式和引理：对于 $\beta>0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $1<p,\ q<+\infty$, 有

$$\begin{aligned}\sum|x_iy_i| &= \sum|\beta x_i|\,|\beta^{-1}y_i|\\ &\leqslant\frac{\beta^p}{p}\left(\sum|x_i|^p\right)+\frac{\beta^{-q}}{q}\left(\sum|y_i|^q\right).\end{aligned} \qquad (27.14)$$

引理 1 设 $g(t)$、$h(t)$、$y(t)$是三个正的可积函数，$t_0\leqslant t<\infty$，它满足

$$\frac{dy}{dt}\leqslant gy+h, \qquad \forall t\geqslant t_0 \qquad (27.15)$$

且

$$\int_t^{t+1}g(s)ds\leqslant\alpha_1,\quad \int_t^{t+1}h(s)ds\leqslant\alpha_2,\quad \int_t^{t+1}y(s)ds\leqslant\alpha_3, \qquad \forall t\geqslant t_0 \qquad (27.16)$$

其中 α_1、α_2、α_3 为正常数，则有

$$y(t+1)\leqslant(\alpha_3+\alpha_2)\exp(\alpha_1), \qquad \forall t\geqslant t_0 \qquad (27.17)$$

(27.1)和 u 作内积，利用(27.7)、(27.12)，可得：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2+\alpha|A^{\frac{1}{2}}u|^2 &\leqslant|(f,\ u)|\leqslant\lambda_1^{-\frac{1}{2}}|f|\,|A^{\frac{1}{2}}u|\\ &\leqslant\frac{\alpha}{2}|A^{\frac{1}{2}}u|^2+\frac{1}{2\lambda_1\alpha}|f|^2.\end{aligned}$$

于是有

$$\frac{d}{dt}|u|^2+\alpha\lambda_1|u|^2\leqslant\frac{d}{dt}|u|^2+\alpha|A^{\frac{1}{2}}u|^2\leqslant\frac{1}{\alpha\lambda_1}|f|^2. \qquad (27.18)$$

(27.1)和 Δu 作内积，由(27.8)、(27.9)和(27.14)，有

$$
\begin{aligned}
&|(B(u, u)+(u, Au)|\\
&\leqslant C|u|^{\frac{1}{2}}|A^{\frac{1}{2}}u||Au|^{\frac{3}{2}}+C_2|A^{\frac{1}{2}}u|^{\frac{1}{2}}|Au|^{\frac{3}{2}}\\
&\leqslant 54(C_1^4|u|^2|A^{\frac{1}{2}}u|^4+C_2^4|A^{\frac{1}{2}}u|^2)+\frac{1}{4}|Au|^2.
\end{aligned}
$$

类似地，有 $|(f, Au)|\leqslant|f||Au|\leqslant|f|^2+\frac{1}{4}|Au|^2.$

由此可得

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|A^{\frac{1}{2}}u|^2+\lambda_1|A^{\frac{1}{2}}u|^2&\leqslant\frac{d}{dt}|A^{\frac{1}{2}}u|^2+|Au|^2\\
&\leqslant C_6|u|^2|A^{\frac{1}{2}}u|^4+C_7|A^{\frac{1}{2}}u|^2+2|f|^2. \qquad (27.19)
\end{aligned}
$$

(27.1)与 A^2u 作内积，得：

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|Au|^2+|A^{\frac{3}{2}}u|^2\\
&\leqslant|(B(u, u)+Cu, A^2u)|+|(f, Au^2)|\\
&\leqslant|(A^{\frac{1}{2}}(B(u,u)+Cu), A^{\frac{3}{2}}u)|+|(A^{\frac{1}{2}}f, A^{\frac{3}{2}}u)|\\
&\leqslant C_3|Au|^2|A^{\frac{3}{2}}u|+C_4|Au||A^{\frac{3}{2}}u|+|A^{\frac{1}{2}}f||A^{\frac{3}{2}}u|\\
&\leqslant\frac{1}{2}C_8|Au|^4+\frac{1}{2}C_9|Au|^2+\frac{3}{2}|A^{\frac{1}{2}}f|^2+\frac{1}{2}|A^{\frac{3}{2}}u|^2.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|Au|^2+\lambda_1|Au|^2&\leqslant\frac{d}{dt}|Au|^2+|A^{\frac{3}{2}}u|^2\\
&\leqslant C_8|Au|^4+C_9|Au|^2+3|A^{\frac{1}{2}}f|^2. \qquad (27.20)
\end{aligned}
$$

将(27.15)应用于(27.18)，可得 $u(t)=S(t)u_0$,

$$
|u(t)|^2\leqslant|u(0)|^2\exp(-\alpha\lambda_1t)+\rho_0^2(1-\exp(-\alpha\lambda_1t)), \qquad (27.21)
$$

其中 $\rho_0=\frac{1}{2\lambda_1}|f|$．因此，$|u(t)|$ 对 t 一致有界，有

$$
\limsup_{t\to\infty}|u(t)|^2\leqslant\rho_0^2. \qquad (27.22)
$$

再从(27.18)，有 $\int_t^{t+1}|A^{\frac{1}{2}}u|^2ds$ 是一致有界的．由(27.19)，有

$$\frac{d}{dt}|A^{\frac{1}{2}}u|^2 \leqslant C_{10}|A^{\frac{1}{2}}u|^4+(C_7-\lambda_1)|A^{\frac{1}{2}}u|^2+2|f|^2,$$

其中 $C_{10}=C_6b_0^2$, $|u(t)|^2\leqslant b_0^2$, $t\geqslant 0$. 则由引理 1, 令

$$g=C_{10}|A^{\frac{1}{2}}u|^2,\ y=|A^{\frac{1}{2}}u|^2,\ h=(C_7-\lambda_1)|A^{\frac{1}{2}}u|^2+2|f|^2,$$

可得 $|A^{\frac{1}{2}}u|^2$ 在 H 上一致有界. 由(27.19)可知 $\int_t^{t+1}|Au(s)|^2ds$ 一致有界. 再从(27.20)可得 $|Au(t)|^2$ 和 $\int_t^{t+1}|A^{\frac{3}{2}}u(s)|^2ds$ 对 t 一致有界, 因而

$$\limsup_{t\to+\infty}|A^{\frac{1}{2}}u(t)|^2\leqslant\rho_1^2, \tag{27.23}$$

$$\limsup_{t\to+\infty}|Au(t)|^2\leqslant\rho_2^2. \tag{27.24}$$

从(27.22)、(27.23)、(27.24)可知: (27.1)的任何解在某个时间之后($t\geqslant t_0>0$)分别进入球

$$B_0=\{x\in H,\ |x|\leqslant 2\rho_0\},$$

$$B_1=\{x\in D(A^{\frac{1}{2}}),\ |A^{\frac{1}{2}}x|\leqslant 2\rho_1\},$$

$$B_2=\{x\in D(A),\ |Ax|\leqslant 2\rho_2\}$$

中, 且 B_2 的 w 极限集 $\mathscr{A}$,

$$\mathscr{A}=w(B_2)=\bigcap_{s>0}Cl\Big(\bigcap_{t>s}S(t)B_2\Big)$$

是(27.1)的整体吸引子, 闭包 Cl 取在 H 上, 且有

$$\mathscr{A}\subseteq B_2\cap B_1\cap B_0.$$

我们考虑(27.1)的截断方程的惯性流形. 设 $\theta(s)$ 为 $\mathbb{R}_+$ 到 $[0, 1]$ 的光滑函数: $\theta(s)=1$, $0\leqslant s\leqslant 1$; $\theta(s)=0, s\geqslant 2$, $|\theta'(s)|\leqslant 2$, $s\geqslant 0$. 固定 $\rho=2\rho_2$, 定义

$$\theta_\rho(s)=\theta\left(\frac{s}{\rho}\right), \qquad s\geqslant 0$$

则(27.1)的截断方程为

$$\frac{du}{dt}+Au+\theta_\rho(|Au|)R(u)=0. \tag{27.25}$$

(27.25)具初值 $u(0)=u_0\in H$ 的解的存在性、唯一性的证明是直

接的. 显然, 当 $|Au|\leqslant\rho$ 时, $\theta_\rho(|Au|)=1$. (27.24)和(27.1)是相合的. 当 $|Au|\geqslant 2\rho$ 时, $\theta_\rho(|Au|)=0$. 作(27.24)与 A^2u 的内积, 得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|Au|^2+\lambda_1|Au|^2\leqslant\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(Au)^2+|A^{\frac{3}{2}}u|^2\leqslant 0.$$

因而轨线 $u(t)$ 将在 $D(A)$ 中以指数收敛于半径 $\rho_3\geqslant 2\rho$ 的球中. 另外, $R(u)$ 对 u 是局部 Lip. 连续的. 而 $F(u)=\theta_\rho(|u|)R(u)$ 是整体 Lip. 连续. 即存在 K, 使

$$|F(u)-F(v)|\leqslant K|u-v|. \qquad \forall u、v\in H \quad (27.26)$$

定义 半群算子 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 的惯性流形, 是一个有限维的光滑流形 $\mu\in H$ (起码是 Lip.), 它满足:

(i) μ 是不变的. 即有

$$S(t)\mu\subset\mu. \quad (27.27)$$

(ii) μ 指数地吸引(27.25)方程的所有解. 即存在常数 $k_1>0$、$k_2>0$, 对于 $u_0\in H$, 有

$$\mathrm{dist}(S(t)u_0,\ \mu)\leqslant k_1e^{-k_2t}, \qquad \forall t\geqslant 0 \quad (27.28)$$

(iii) 吸引子 $\mathscr{A}$ 在 μ 上.

现在要构造出惯性流形, 从而证明惯性流形的存在性. 设 P_N 是在 H 中 N 维的正交投影, $Q_N=I-P_N$. 并记 $P=P_N$、$Q=Q_N$. 设 $u(t)$ 是(27.25)的解. 令 $p(t)=Pu$、$q(t)=Qu$, 则 $p(t)$、$q(t)$ 在 PH 和 QH 上满足:

$$\frac{dp}{dt}+Ap+pF(u)=0, \quad (27.29)$$

$$\frac{dq}{dt}+Aq+QF(u)=0, \quad (27.30)$$

其中 $F(u)=\theta_\rho(|Au|)R(u)$. 且 $u=p+q$. 我们寻求惯性流形 μ, 它是由 Lip. 函数 Φ: $PD(A)\to QD(A)$ 的图构造得到的. 即 $\mu=\mathrm{Graph}\,\Phi$. 函数 Φ 作为一个算子, 在函数类 $\mathscr{F}_{b,l}$ 上的不动点得到. 其中 $\mathscr{F}_{b,l}$ 是一类函数 Φ: $PD(A)\to QD(A)$, 它满足:

$$|A\Phi(p)|\leqslant b, \qquad \forall p\in PD(A) \quad (27.31)$$

$$|A\Phi(p_1)-A\Phi(p_2)|\leqslant l|Ap_1-Ap_2|,\qquad \forall p_1,\ P_2\in pD(A) \tag{27.32}$$

$$\mathrm{Supp}\,\Phi\subset\{p\in PD(A):|Ap|\leqslant 4\rho\},$$

其中 $b>0$、$l>0$. 当 $p=p(t)$, $q(t)=\Phi(p(t))$满足(27.29)、(27.30)时, $u=p(t)+\Phi(p(t))$为(27.25)的解. 设 Φ 在 $\mathscr{F}_{b,l}$ 中给定, $p_0\in PD(A)$, 则

$$\frac{dp}{dt}+Ap+pF(p+\Phi(p))=0,\quad p(0)=p_0 \tag{27.33}$$

的解 $p=p(t;\ p_0,\Phi)$是唯一存在的. 这是由于 $\sigma\to\theta_\rho R(\sigma+\Phi(\sigma))$ 是 Lip. 连续的. 因 $p=p(t;p_0,\ \Phi)$, $\forall t\in\mathbb{R}$. 类似于(27.30), 有

$$\frac{dq}{dt}+Aq+QF(p+\Phi(p))=0. \tag{27.34}$$

由于 $QF(p+\Phi(p))$是有界的: $R\to H$, 因此, (27.34)存在唯一的当 $t\to\infty$ 时是有界的解 $q(t)$. 由此可得

$$q(0)=-\int_{-\infty}^{0}\rho^{\tau AQ}QF(p+\Phi(p))d\tau, \tag{27.35}$$

其中 $p=p(\tau)=p(\tau;\ \Phi,p_0)$. $q(0)$依赖于 $\Phi\in\mathscr{F}_{b,l}$ 和 $p\in PD(A)$. $q(0)=q(0;\ p_0,\Phi)$. 函数

$$p_0\in PD(A)\to q(0;\ p_0,\ \Phi)\in QD(A)$$

把 $PD(A)$映射到 $QD(A)$, 记为$\mathscr{T}\Phi$. 因此

$$\mathscr{T}\Phi(p_0)=-\int_{-\infty}^{0}e^{\tau AQ}QF(u)d\tau, \tag{27.36}$$

其中 $u=u(\tau)=p(\tau;\ \Phi,p_0)+\Phi(p(\tau;\ \Phi,\ p_0))$. 因 $q(0)=\Phi(p_0)$, 于是寻求关于 N、b、l 的条件, 使

(i) $\mathscr{T}$ 映射 $\mathscr{F}_{b,l}$ 到自身;

(ii) $\mathscr{T}$ 在 $\mathscr{F}_{b,l}$ 上是压缩的.

我们现在考虑函数 Φ: $PD(A)\to QD(A)$ $(P=P_N,\ Q=Q_N=I-P_N)$. $\Phi\in\mathscr{F}_{b,l}$, 即满足(27.31)～(27.33).

引入距离

$$\|\Phi-\Psi\|=\sup_{p\in D(A)}|A\Phi(p)-A\Psi(p)|, \tag{27.37}$$

则 $\mathscr{F}_{b,l}$ 是一个完备的度量空间.对于 $\Phi\in\mathscr{F}_{b,l}$, 映射 $\mathscr{T}$ 在 $PD(A)$ 上定义为

$$\mathscr{T}\Phi(p_0)=-\int_{-\infty}^{0}e^{\tau AQ}QF(u)d\tau,\qquad p_0\in PD(A)\quad(27.38)$$

其中 $u(\tau)=p(\tau;\Phi,p_0)+\Phi(p(\tau;\Phi,p_0))$, $p(\tau;\Phi,p_0)$ 是(27.29)满足 $p(0;\Phi,p_0)=p_0$ 的解. 以下我们对算子 $\mathscr{T}$ 的性质进行研究.

引理 2 设 $\alpha>0$ 和 $\tau<0$, 算子 $(AQ)^\alpha e^{\tau AQ}$ 在 QH 上是线性、连续的, 它在 $\mathscr{L}(QH)$ 上的模(即 $|(AQ)^\alpha e^{\tau AQ}|_{op}$)是囿于

$$\begin{cases}K_3|\tau|^{-\alpha}, & 当\ -\alpha\lambda_{N+1}^{-1}\leqslant\tau<0\ 时;\\ \lambda_{N+1}^{\alpha}e^{\tau\lambda_{N+1}}, & 当\ -\infty<\tau\leqslant-\alpha\lambda_{N+1}^{-1}\ 时.\end{cases}\qquad(27.39)$$

证明 设 $v=\sum_{j=N+1}^{\infty}b_jw_j$ 是 QH 上的一个元素, 则

$$|(AQ)^\alpha e^{\tau AQ}v|^2=\sum_{j=N+1}^{\infty}(\lambda_j^\alpha e^{\tau\lambda_j})^2b_j^2\leqslant\sup_{\lambda\geqslant\lambda_{N+1}}(\lambda^\alpha e^{\tau\lambda})^2\Sigma b_j^2$$
$$=\sup_{\lambda\geqslant\lambda_{N+1}}(\lambda^\alpha e^{\tau\lambda})^2|v|^2.$$

因此

$$|(AQ)^\alpha e^{\tau AQ}|_{op}\leqslant\sup_{\lambda\geqslant\lambda_{N+1}}\lambda^\alpha e^{\tau\lambda}.$$

初等计算表明,

$$\sup_{\lambda\geqslant\lambda_{N+1}}(\lambda^\alpha e^{\tau A\lambda})=\begin{cases}|\tau|^{-\alpha}(\alpha e^{-1})^\alpha, & 当\ \alpha\lambda_{N+1}^{-1}\leqslant\tau<0\ 时,\\ \lambda_{N+1}^{\alpha}e^{\tau\lambda_{N+1}}, & 当\ \tau\leqslant-\alpha\lambda_{N+1}^{-1}\ 时.\end{cases}$$

我们得到(27.39), 其中 $K_3=K_3(\alpha)=(\alpha e^{-1})^\alpha$.

作为(27.39)的直接推论, 有

$$\int_{-\infty}^{0}|(AQ)^\alpha e^{\tau AQ}|_{op}d\tau\leqslant(1-\alpha)^{-1}e^\alpha\lambda_{N+1}^{\alpha-1}.\qquad(0<\alpha<1)\quad(27.40)$$

从(27.10)、(27.11)可得

$$|(AQ)^{\frac{1}{2}}R(u)|\leqslant|A^{\frac{1}{2}}B(u,u)|+|A^{\frac{1}{2}}eu|+|A^{\frac{1}{2}}f|$$
$$\leqslant C_3|Au|^2+C_4|Au|+|A^{\frac{1}{2}}f|.$$

当 $|Au|>2\rho$ 时, $\theta_\rho(|Au|)=0$, 有

$$|(AQ)^{\frac{1}{2}}F(u)|\leqslant K_4, \tag{27.41}$$

其中 $K_4=4C_3\rho^2+2C_4\rho+|A^{\frac{1}{2}}f|$，$F(u)$由(27.30)所决定.

引理 3 设$p_0\in PD(A)$，$\mathscr{T}\Phi(p_0)\in QD(A)$，则

$$|A\mathscr{T}\Phi(p_0)|\leqslant K_5\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}, \tag{27.42}$$

$$|A^{\frac{5}{4}}\mathscr{T}\Phi(p_0)|\leqslant K_6\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{4}}, \tag{27.43}$$

其中 K_5、K_6 是适当的常数，它与 p_0、Φ 无关.

证明 因 $Qe^{\tau AQ}=e^{\tau AQ}$，易见 $\mathscr{T}\Phi(p_0)\in QP(A)$.

$$\begin{aligned}|A\mathscr{T}\Phi(p_0)|&\leqslant\int_{-\infty}^{0}|AQe^{\tau AQ}F(u)|d\tau\\&\leqslant\int_{-\infty}^{0}|(AQ)^{\frac{1}{2}}e^{\tau AQ}|_{op}|(AQ)^{\frac{1}{2}}F(u)|d\tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|A^{\frac{5}{4}}\mathscr{T}\Phi(p_0)|&\leqslant\int_{-\infty}^{0}|(AQ)^{\frac{5}{4}}e^{\tau AQ}F(u)|d\tau\\&\leqslant\int_{-\infty}^{0}|(AQ)^{\frac{3}{4}}e^{\tau AQ}|_{op}|(AQ)^{\frac{1}{2}}F(u)|d\tau.\end{aligned}$$

不等式(27.43)、(27.42)可从(27.40)、(27.41)得到. 现取

$$b=K_5\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}, \tag{27.44}$$

则对 $\Phi\in\mathscr{F}_{b,l}$，类似于(27.31)，$\mathscr{T}\Phi$ 满足

$$|A\mathscr{T}\Phi(p_0)|\leqslant b.\qquad \forall p_0\in PD(A) \tag{27.45}$$

由于(27.43)，$\mathscr{T}\Phi$ 是在 $D(A^{\frac{5}{4}})$中的有界集. 因 $A^{-\frac{1}{4}}$ 是紧的，因此，$\mathscr{T}\Phi$ 的值域是 $QD(A)$ 的一个紧子集. 它不依赖于 Φ.

现考虑 $\mathscr{T}\Phi$ 的支集性质、连续性质.

引理 4 对每个 $\Phi\in\mathscr{F}_{b,l}$，$\mathscr{T}\Phi$ 的支集包含在 $\{p\in PD(A);|Ap|\leqslant 4\rho\}$ 中.

证明 $u=p+\Phi(p)$. 如 $|Ap|>2\rho$，则

$$|Au|=(|Ap|^2+|A\Phi(p)|^2)^{\frac{1}{2}}\geqslant|Ap|>2\rho.$$

因此 $\theta_\rho(|Au|)=0$.

现设 $|Ap_0|>4\rho$，则在 t 的某个区间上 $|Ap(t)|>2\rho$. 于是，

方程(27.28)为

$$\frac{dp}{dt}+Ap=0.$$

由此推出

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|Ap|^2+\lambda_1|Ap|^2\leqslant\frac{1}{2}\frac{d|Ap|^2}{dt}+|A^{\frac{3}{2}}p|^2=0.$$

因此，对 $\tau<0$，有

$$2\rho<|Ap(0)|\leqslant|Ap(\tau)|\exp(\lambda_1\tau)\leqslant|Ap(\tau)|.$$

因而 $\theta_\rho(|Au(\tau)|)=0,\ \forall\tau\leqslant0$. 由(27.38)，有

$$\mathscr{T}\Phi(p_0)=0. \qquad \forall\Phi\in\mathscr{F}_{b,l}$$

先证非线性 $F(u)$ 的 Lip. 性质.

引理 5 设 p_1、$p_2\in PD(A)$，Φ_1、$\Phi_2\in\mathscr{F}_{b,l}$，$u_i=p_i+\Phi(p_i)$，则

$$\begin{aligned}&|A^{\frac{1}{2}}F(u_1)-A^{\frac{1}{2}}F(u_2)|\\&\quad\leqslant K_7[(1+l)|Ap_1-Ap_2|+\|\Phi_1-\Phi_2\|],\end{aligned}\tag{27.46}$$

其中常数 K_7 不依赖于 p_i 或 Φ_i(其中 $i=1,2$).

证明 首先，注意到从(27.10)和(27.11)推出

$$\begin{aligned}&|A^{\frac{1}{2}}R(u_1)-A^{\frac{1}{2}}R(u_2)|\\&\leqslant|A^{\frac{1}{2}}[B(u_1,u_1)-B(u_1,u_2)+B(u_1,u_2)-B(u_2,u_2)]|\\&\quad+|A^{\frac{1}{2}}C(u_1-u_2)|\\&\leqslant C_3(|Au_1|+|Au_2|)|Au_1-Au_2|+C_4|Au_1-Au_2|\end{aligned}$$

和

$$|A^{\frac{1}{2}}R(u_1)|\leqslant C_3|Au_1|^2+C_4|Au_1|^2+|A^{\frac{1}{2}}f|.$$

定义 G 如下：

$$\begin{aligned}G&=A^{\frac{1}{2}}F(u_1)-A^{\frac{1}{2}}F(u_2)\\&=\theta_\rho(|Au|)A^{\frac{1}{2}}R(u_1)-\theta_\rho(|Au_2|)A^{\frac{1}{2}}R(u_2).\end{aligned}$$

分三种情况讨论：

(i) $2\rho\leqslant|Au_1|$、$2\rho\leqslant|Au_2|$,

(ii) $|Au_1|<2\rho\leqslant|Au_2|$ 或 $|Au_2|<2\rho\leqslant|Au_1|$,

(iii) $|Au_1|\leqslant 2\rho$, $|Au_2|\leqslant 2\rho$.

利用当 $|Au|\geqslant 2\rho$ 时 $\theta_\rho(|Au_1|)=0$ 和 $|\theta'|\leqslant 2\rho^{-1}$，我们得到：

(i) $G=0$,

(ii) $|G|=|\theta_\rho(|Au|)A^{\frac{1}{2}}R(u)|$

$$
\begin{aligned}
&=|\theta_\rho(|Au_1|)A^{\frac{1}{2}}R(u_1)-\theta_\rho(|Au_2|)A^{\frac{1}{2}}R(u_1)|\\
&\leqslant|\theta_\rho(Au_1)|-\theta_\rho((Au_2))||A^{\frac{1}{2}}R(u_1)|\\
&\leqslant 2\rho^{-1}||Au_1|-|Au_2||\\
&\quad\cdot(C_3|Au_1|^2+C_4|Au_1|+|A^{\frac{1}{2}}f|)\\
&\quad+[C_3(|Au_1|+|Au_2|)+C_4]|Au_1-Au_2|.
\end{aligned}
$$

因此，

$$
|A^{\frac{1}{2}}F(u_1)-A^{\frac{1}{2}}F(u_2)|\leqslant K_7|Au_1-Au_2|. \tag{27.47}
$$

其中 $K_7=2\rho^{-1}(C_34\rho^2+C_42\rho+|A^{\frac{1}{2}}f|)+C_34\rho+C_4$. 因

$$
u_1-u_2=p_1-p_2+(\Phi_1(p_1)-\Phi_1(p_2))+(\Phi_1(p_2)-\Phi_2(p_2)),
$$

有
$$
|Au_1-Au_2|\leqslant(1+l)|Ap_1-Ap_2|+\|\Phi_1-\Phi_2\|.
$$

联合(27.47)，即得(27.46).

现在来证明：在适当假设之下，$\mathscr{T}$ 是从 $\mathscr{F}_{b,l}$ 到 $\mathscr{F}_{b,l}$ 的 Lip 映射，且是严格压缩的.

首先，设 Φ 是固定的，p_{01}、$p_{02}\in PD(A)$，$p=p_1(t)$、$p=p_2(t)$ 是(27.28)满足初始条件 $p_i(0)=p_{0i}$ 的解($i=1, 2$).

令 $\Delta=p_1-p_2$，则 Δ 满足方程

$$
\frac{d\Delta}{dt}+A\Delta+PF(u_1)-PF(u_2)=0, \tag{27.48}
$$

其中 $u_i=p_i+\Phi(p_i)$, $i=1, 2$. 作(27.48)与 $A^2\Delta$ 的内积，得：

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|A\Delta|^2+|A^{\frac{3}{2}}\Delta|^2=-(A^{\frac{1}{2}}p(Fu_1)-F(u_2),\ A^{\frac{3}{2}}\Delta). \tag{27.49}
$$

由(27.46)，得

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|A\Delta|^2+|A^{\frac{3}{2}}\Delta|^2\leqslant K_7(1+l)|A\Delta||A^{\frac{3}{2}}\Delta|.
$$

因此 $|A\Delta|\frac{d}{dt}|A\Delta|\geqslant -|A^{\frac{3}{2}}\Delta|^2-K_7(1+l)|A\Delta||A^{\frac{3}{2}}\Delta|$.

因 $\Delta\in PD(A)$，有

$$|A^{\frac{3}{2}}\Delta|\leqslant\lambda_N^{\frac{1}{2}}|A\Delta|.$$

因此，

$$|A\Delta|\frac{d}{dt}|A\Delta|\geqslant -\lambda_N|A\Delta|^2-K_7(1+l)\lambda_N^{\frac{1}{2}}|A\Delta|^2,$$

或

$$\frac{d}{dt}|A\Delta|+(\lambda_N+K_7(1+l)\lambda_N^{\frac{1}{2}})|A\Delta|\geqslant 0. \qquad (27.50)$$

从(27.50)可得

$$|A\Delta(\tau)|\leqslant|A\Delta(0)|\exp\left(-\tau(\lambda_N+K_7(1+l)\lambda_N^{\frac{1}{2}})\right).$$

$$\tau\leqslant 0 \qquad (27.51)$$

引理 6 设 $\gamma_N=\lambda_{N+1}-\lambda_N-K_7(1+l)\lambda_N^{\frac{1}{2}}>0$，则对 $\Phi\in\mathscr{F}_{b,l}$ 和 p_{01}、$p_{02}\in PD(A)$，有

$$|A\mathscr{T}\Phi(p_{01})-A\mathscr{T}\Phi(p_{02})|\leqslant L|Ap_{01}-Ap_{02}|, \qquad (27.52)$$

其中

$$L=K_7(1+l)\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}[1+(1-\gamma_N\alpha_N)^{-1}]e^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\gamma_N\alpha_N}{2}\right),$$

$$\gamma_N=\frac{\lambda_N}{\lambda_{N+1}}, \qquad \alpha_N=1+K_7(1+l)\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}.$$

推出 $\Phi\in\mathscr{F}_{b,l}$.

证明 由(27.38)和(27.46)，有

$$\begin{aligned}&|A\mathscr{T}\Phi(p_{01})-A\mathscr{T}\Phi(p_{02})|\\ &\quad\leqslant\int_{-\infty}^0|AQe^{\tau AQ}Q(F(u_1)-F(u_2))|d\tau\\ &\quad\leqslant K_7(1+l)\int_{-\infty}^0|(AQ)^{\frac{1}{2}}e^{\tau AQ}|_{op}|A\Delta(\tau)|d\tau,\end{aligned}$$

其中 $\Delta=p_1-p_2$. 由引理 2 和(27.51)，有

$$\int_{-\infty}^{0} |(AQ)^{\frac{1}{2}} e^{\tau AQ}|_{op} |A\Delta(\tau)| d\tau$$

$$\leqslant \left(\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}\lambda_{N+1}^{-1}} \lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} \exp[\tau(\lambda_{N+1} - \lambda_N - K_7(1+l)\lambda_N^{\frac{1}{2}})] d\tau \right.$$

$$+ \int_{-\frac{1}{2}\lambda_{N+1}^{-1}}^{0} K_3\left(\frac{1}{2}\right) |\tau|^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left. \cdot \exp[-\tau(\lambda_N + K_7(1+l)\lambda_N^{\frac{1}{2}})] d\tau \right) |Ap_{01} - Ap_{02}|.$$

由初等计算可知，最后右端表达式囿于

$$\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} [1 + (1 - \gamma_N \alpha_N)^{-1}] \exp\left(\frac{\gamma_N \alpha_N}{2}\right) |Ap_{01} - Ap_{02}|,$$

这就证明了(27.52)．由(27.44)、(27.52)和引理 4 推得

$$\mathscr{T}\Phi \in \mathscr{F}_{b,l}.$$

至此我们已证明了映射 $\mathscr{T}$: $\mathscr{F}_{b,l} \to \mathscr{F}_{b,l}$．现证 $\mathscr{T}$ 是 Lip 映射．为此，考虑两个函数 Φ_1 和 Φ_2，具有同一初始条件．令

$$p_i = p(t_i; \Phi_i, p_0), \quad u_i = p_i + \Phi_i(p_i), \text{其中 } i = 1, 2.$$

我们估计 $|A\mathscr{T}\Phi_1(p_0) - A\mathscr{T}\Phi_2(p_0)|$．用相似的方法，可得：

$$\frac{d}{dt}|A\Delta| + \lambda_N \alpha_N |A\Delta| \geqslant -K_7 \lambda_N^{\frac{1}{2}} \|\Phi_1 - \Phi_2\|, \qquad (27.53)$$

其中 $\Delta = p_1 - p_2$, $\alpha_N = (1 + K_7(1+l)\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}})$．因 $\Delta(0) = 0$，从(27.53)可得：

$$|A\Delta(\tau)| \leqslant \frac{K_7 \lambda_N^{\frac{1}{2}} \|\Phi_1 - \Phi_2\|}{\alpha_N \lambda_N} (\exp(-\alpha_N \lambda_N \tau) - 1)$$

$$\leqslant K_7 \lambda_N^{-\frac{1}{2}} \|\Phi_1 - \Phi_2\| \exp(-\alpha_N \lambda_N \tau). \qquad \tau \leqslant 0 \qquad (27.54)$$

如同引理 6，由(27.38)、(27.46)和(27.54)，可得

$$|A\mathscr{T}\Phi_1(p_0) - A\mathscr{T}\Phi_2(p_0)|$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{0} |AQ e^{\tau AQ}(F(u_1) - F(u_2))| d\tau$$

$$\leqslant K_7 \int_{-\infty}^{0} |(AQ)^{\frac{1}{2}} e^{\tau AQ}|_{op} [(1+l)|A\Delta| + \|\Phi_1 - \Phi_2\|] d\tau$$

$$\leqslant K_7\|\Phi_1-\Phi_2\|\int_{-\infty}^{0}|(AQ)^{\frac{1}{2}}e^{\tau AQ}|_{op}$$

$$\cdot(1+K_7\lambda_N^{-\frac{1}{2}}(1+l)e^{-\lambda_N\alpha_N\tau})d\tau. \qquad (27.55)$$

由引理 2, (27.55)右端的积分囿于

$$2e^{-\frac{1}{2}}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}+K_7(1+l)\lambda_N^{-\frac{1}{2}}\Big(\int_{-\infty}^{-a}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}\exp[\tau(\lambda_{N+1}-\lambda_N\alpha_N)]d\tau$$

$$+\int_{-a}^{0}K_3\left(\frac{1}{2}\right)|\tau|^{-\frac{1}{2}}\exp(-\lambda_N\alpha_N\tau)d\tau$$

$$\leqslant 2e^{-\frac{1}{2}}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}+K_7(1+l)\lambda_N^{-\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\left[\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}}(1+(1-\gamma_N\alpha_N)^{-1})\exp\left(\frac{\gamma_N\alpha_N}{2}\right)\right]$$

$$\leqslant 2e^{-\frac{1}{2}}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}+\lambda_N^{-\frac{1}{2}}L.$$

于是，有

$$|A\mathscr{T}\Phi_1(p_0)-A\mathscr{T}\Phi(p_0)|\leqslant L'\|\Phi_1-\Phi_2\|,$$

$$\forall p_0\in PD(A) \qquad (27.56)$$

其中 $$L'=K_7(2e^{-\frac{1}{2}}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}+\lambda_N^{-\frac{1}{2}}L).$$

如上所述，我们寻求条件保证 $\mathscr{T}$ 映射 $\mathscr{F}_{b,l}$ 到自身，并在 $\mathscr{F}_{b,l}$ 中是严格压缩的. 这就要求寻找充分条件(对 λ_N 和 λ_{N+1})，使之保证

$$L\leqslant l, \qquad L'<1.$$

首先，注意到 $\gamma_N=\lambda_{N+1}-\lambda_N-k_l(1+l)\lambda_N^{\frac{1}{2}}>0$ 等价于

$$1-\gamma_N\alpha_N>0 \qquad (27.57)$$

或

$$1>\gamma_N\alpha_N>0, \qquad (27.57)'$$

则从(27.57)推出

$$L\leqslant K_7(1+l)\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}[1+(1-\gamma_N\alpha_N)^{-1}].$$

为使 $L\leqslant l$，充分地选取 N，使得以下两个不等式成立：

$$K_7(1+l)\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}\leqslant\frac{l}{2}, \qquad (27.58)$$

$$K_7(1+l)\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}(1-\gamma_N\alpha_N)^{-1}\leqslant\frac{l}{2}. \tag{27.59}$$

(27.58)可写为

$$K_{10}\leqslant\lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}}, \tag{27.60}$$

其中 $K_{10}=2K_7(1+l)L^{-1}$. 现设选取 N，使(27.60)成立. 不等式(27.59)可写成

$$K_{10}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}\leqslant 1-\gamma_N\alpha_N, \tag{27.61}$$

它等价于

$$K_{10}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}-1+\gamma_N+K_7(1+l)\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}\gamma_N^{\frac{1}{2}}\leqslant 0, \tag{27.62}$$

其中 $\gamma_N=\dfrac{\lambda_N}{\lambda_{N+1}}$. 设

$$\gamma_N^{\frac{1}{2}}+K_{10}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}=(\lambda_N\lambda_{N+1}^{-1})^{\frac{1}{2}}+K_{10}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}\leqslant 1. \tag{27.63}$$

应用(27.63)两次，得

$$K_{10}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}-1+\gamma_N+K_{10}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}\gamma_N^{\frac{1}{2}}\leqslant K_{10}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}-1+\gamma_N^{\frac{1}{2}}\leqslant 0. \tag{27.64}$$

因 $l\leqslant\frac{1}{8}$，有 $K_7(1+l)\leqslant K_{10}$. 由(27.63)推出(27.62). 再推出(27.61).

因此，为使 $\mathscr{T}$ 映射 $\mathscr{F}_{b,l}$ 为 $\mathscr{F}_{b,l}$，我们需设 $\gamma_N>0$ 或 $1-\gamma_N\alpha_N>0$. 这个假设由(27.61)所保证. $\mathscr{T}$ 映射 $\mathscr{F}_{b,l}$ 为自身的充分条件是(27.58)、(27.61)，它由(27.60)、(27.63)保证. 容易看到，这两个不等式是

$$K_{10}\leqslant\lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}}-\lambda_N^{\frac{1}{2}} \tag{27.65}$$

的推论.

为使 $\mathscr{T}$ 是 $\mathscr{F}_{b,l}$ 上的压缩映射，必需 $L'<1$. 设 $L'\leqslant\frac{1}{2}$，从而推出

$$K_{11}\leqslant\lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}}, \tag{27.66}$$

其中 $K_{11}=2K_7(2e^{-\frac{1}{2}}+L)$. 因此，在条件(27.65)、(27.66)下，$\mathscr{T}$ 映射 $\mathscr{F}_{b,l}$ 为自身，且是压缩的. 因此，$\mathscr{T}$ 存在不动点.

现在来证明 $M=\mathrm{Graph}(\Phi)$ 在 $S(t)$ 作用下是不变的. 即有

$$S(t)M\subset M. \qquad \forall t\geqslant 0 \tag{27.67}$$

并证明它吸引着所有轨线指数地逼近 M.

先证明 M 的不变性. 事实上，从表达式

$$\Phi(p_0)=-\int_{-\infty}^{0}e^{\tau AQ}QF(u(\tau,\ p_0))d\tau, \tag{27.68}$$

其中 $u(\tau,\ p_0)=p(\tau;\Phi,\ p_0)+\Phi(p(\tau);\ \Phi,\ p_0)$，现置 p_0 为 $p(t)=p(t;\Phi,\ p_0)$ 于(27.68)中，且注意到

$$p(\tau;\Phi,\ p(t;\Phi,\ p_0))=p(\tau+t;\Phi,\ p_0),$$

可推出

$$\begin{aligned}\Phi(p(t))&=-\int_{-\infty}^{0}e^{\tau AQ}QF(u(\tau),\ p(t))d\tau\\&=-\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)AQ}QF(u(\tau),\ p_0))d\tau. \qquad \forall t\in\mathbb{R}\end{aligned} \tag{27.69}$$

上式对 t 微商，容易看到，$(p(t),\ q(t))$ 是问题(27.29)、(27.30)的解，$u(t)=p(t)+q(t)$ 为 (27.25)的解，其中 $q(t)=\Phi(p(t))$. 这就表明 $S(t)M\subseteq M$, $\forall t\geqslant 0$.

为了证明 M 指数地吸引 (27.25) 的所有解，我们先叙述方程(27.20)的挤压性质：

挤压性质 对每个 $T>0$、$\gamma>0$、$r>0$，存在常数 K_2、K_3 (它依赖于 T、γ、r 和常数 $C_1\sim C_4$，但不依赖 $S(t)$ 和 N)，使得对每个 $N\geqslant 1$，如下之一不等式成立：

$$|Q_N(S(t)u_0-S(t)v_0)|\leqslant\gamma|p_N(S(t)u_0-S(t)v_0)| \tag{27.70}$$

或

$$|S(t)u_0-S(t)v_0|\leqslant K_2\exp(-K_3\alpha\lambda_{N+1}t)|u_0-v_0|. \tag{27.71}$$

将这个结果应用于满足 $t_0\leqslant t\leqslant 2t_0$ 的一切 t，其中 $t_0=\left(\frac{1}{2K_1}\right)\log 2$, K_1 为常数. 当 $|Au_0|\leqslant r$、$|Av_0|\leqslant r$ 时，有

$$|S(t)u_0-S(t)v_0|\leqslant \exp(K_1t)|u_0-v_0|, \qquad \forall t\geqslant t_0$$

$\gamma=\frac{1}{8}$, $N\geqslant N_0$, 其中 N_0 满足

$$\lambda_{N_0+1}\geqslant(2K_3\alpha t_0)^{-1}\log(2K_2). \tag{27.72}$$

此时(27.70)、(27.71)变为

$$|Q_N(S(t)u_0-S(t)v_0)|\leqslant\frac{1}{8}|P_N(S(t)u_0-S(t)v_0)|, \tag{27.73}$$

$$|S(t)u_0-S(t)v_0|\leqslant\frac{1}{2}|u_0-v_0|, \tag{27.74}$$

其中 u_0、$v_0\in D(A)$, $|Au_0|\leqslant r$, $|Av_0|\leqslant r$, $t_0\leqslant t\leqslant 2t_0$.

固定 $r=4\rho+b$, 依(27.24)、(27.25)的轨线终将在 $D(A)$ 中进入以 0 为原点以 $4\rho=8\rho_2$ 为半径的球内. 设

$$|Au_0|\leqslant 4\rho, \qquad |AS(t)u_0|\leqslant 4\rho. \qquad t\geqslant 0$$

我们首先证明:对任何 t_1, $t_0\leqslant t_1\leqslant 2t_0$, 有

$$\text{dist}(S(t_1)u_0,\ \mu)\leqslant\frac{1}{2}\text{dist}(u_0,\ M),$$

其中 $\text{dist}(\phi, M)=\inf\{|\phi-v|: v\in M\}$. 为此, 选取 v_0, 使 $|u_0-v_0|=\text{dist}(u_0,\ M)$. 则 $v_0=Pv_0+\Phi(Pv_0)$. 我们要求 $|APv_0|\leqslant 4\rho$. 否则, 如 $|APv_0|>4\rho\geqslant|APu_0|$, 则 $\Phi(Pv_0)=0$, $v_0=Pv_0$. 另外, 存在 β, $0<\beta\leqslant 1$, 使 $|APv_\beta|=4\rho$, 其中 $v_\beta=\beta Pu_0+(1-\beta)v_0\in PD(A)$. 则有 $\Phi(v_\beta)=0$. 因此, $v_\beta\in\mu$, 且

$$\begin{aligned}|v_\beta-v_0|^2&=|v_\beta-Pu_0|^2+|Qu_0|^2\\&=|(1-\beta)(v_0-Pu_0)|^2+|Qu_0|^2\\&<|v_0-Pu_0|^2+|Qu_0|^2=|v_0-u_0|^2.\end{aligned}$$

这和 $|v_0-u_0|=\text{dist}(u_0, M)$ 矛盾. 因 $|\Phi(Pv_0)|\leqslant b$, 有

$$|Av_0|\leqslant|APv_0|+|A\Phi(Pv_0)|\leqslant 4\rho+b=r.$$

其次, 对 $S(t)u_0$ 和 $S(t)v_0$ 应用挤压性质(27.73)、(27.74). 如

(27.74)成立，则

$$\operatorname{dist}(S(t_1)u_0, \mu) \leqslant |S(t_1)u_0 - S(t_1)v_0|$$
$$\leqslant \frac{1}{2}|u_0 - v_0| \leqslant \frac{1}{2}\operatorname{dist}(u_0, \mu).$$

如(27.73)成立，则

$$\operatorname{dist}(S(t_1)u_0, \mu) \leqslant |S(t_1)u_0 - (P(S(t_1)u_0 + \Phi(PS(t)u_0))|$$
$$\leqslant |QS(t_1)u_0 - QS(t_1)v_0|$$
$$+|\Phi(PS(t_1)v_0) - \Phi(PS(t_1)u_0)|$$
$$\leqslant \left(\frac{1}{8} + l\frac{\lambda_N}{\lambda_{N+1}}\right)|PS(t_1)v_0 - PS(t_1)u_0|.$$

从(27.73)、(27.32)和

$$|q| \leqslant \lambda_{N+1}^{-1}|Aq|, \qquad q \in QD(A)$$
$$|Ap| \leqslant \lambda_N|p| \qquad p \in PD(A)$$

有

$$\operatorname{dist}(S(t_1)u_0.M) \leqslant \frac{1}{4}|S(t_1)v_0 - S(t_1)u_0|$$
$$\leqslant \frac{1}{2}(v_0 - u_0) = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(u_0, M).$$

于是，对任意 $t \geqslant t_0$, $t = nt_1$, $t_0 \leqslant t \leqslant 2t_0$，有

$$\operatorname{dist}(S(t)u_0, \mu) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \operatorname{dist}(u_0, M)$$
$$= \exp\left(-\frac{t}{t_1}\log 2\right)\operatorname{dist}(u_0, M)$$
$$\leqslant \exp\left(-\frac{t}{2t_0}\log 2\right)\operatorname{dist}(u_0, M). \quad (27.75)$$

它给出指数衰减收敛为 $\frac{1}{2t_0}\log 2$.

我们再证明整体吸引子 $\mathscr{A} \subset M$. 事实上，如 $u \in \mathscr{A}$，则解 $S(t)u$ 对一切 t 定义. 根据(27.23)、(27.24)，有

$$\operatorname{dist}(S(t)u, M) \leqslant 2\rho_2. \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

令 $v = S(-t)u$，其中 $t \geqslant t_0$，则从(27.75)，有

$$\operatorname{dist}(u, M)=\operatorname{dist}(S(t)v, M)\leqslant\exp\left(-\frac{t}{t_0}\log 2\right)\cdot 2\rho_2.$$

这就推出 $\operatorname*{dist}\limits_{u\in\mathscr{A}}(u, M)=0$. 因而 $\mathscr{A}\subset M$.

综合以上结果，可得如下定理.

定理 1 设满足(27.1)～(27.11)，并设 $0<l<\frac{1}{8}$，N_0 为(27.72)所确定，则存在常数 K_{10}、K_{11}（依赖于 l 和初值），使

$$N\geqslant N_0,\quad \lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}}\geqslant K_{11},\quad \lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}}-\lambda_N^{\frac{1}{2}}\geqslant K_{10}. \tag{27.76}$$

则存在 $b>0$，使

(i) $\mathscr{T}$ 映射 $\mathscr{F}_{b,l}$ 为 $\mathscr{F}_{b,l}$.

(ii) $\mathscr{T}$ 在 $\mathscr{F}_{b,l}$ 中只有一个不动点.

(iii) $M=\operatorname{Graph}(\Phi)$ 是(27.25)的惯性流形.

(iv) M 含有(27.1)的整体吸引子.

定理 2 设方程(27.1)、(27.25)给定在 H 上，其中非线性项 $F(u)=\theta_\rho(|Au|)R(u)$ 满足(27.26). 设 l 给定，$0<l<\frac{1}{8}$. 设存在 ρ_0，使(27.1)的每个解(27.21)成立. 则存在常数 N_0、K_{12}、K_{13}（它们依赖于 l 和问题的初值），使

$$N\geqslant N_0,\quad \lambda_{N+1}\geqslant K_{12},\quad \lambda_{N+1}-\lambda_N\geqslant K_{13}. \tag{27.77}$$

则定理 1 的结论成立.

证明 非线性项 $F(u)=\theta_\rho(u)R(u)$ 满足整体 Lip 条件

$$|F(u)-F(v)|\leqslant K|u-v|. \qquad \forall u、v\in H$$

选取参数 $\rho=2\rho_0$. 空间 $\mathscr{F}_{b,l}$ 由 Φ: $PH\to QH$ 组成，满足：

$$|\Phi(p)|\leqslant b, \qquad \forall p\in PD(A)$$

$$|\Phi(p_1)-\Phi(p_2)|\leqslant l|p_1-p_2|, \qquad \forall p_1、p_2\in D(A)$$

$$\sup p\Phi\subseteq\{p\in PD(A)\mid |p|\leqslant 4\rho\}.$$

算子 $\mathscr{T}$ 定义为

$$\mathscr{T}\Phi(p_0)=-\int_{-\infty}^{0}e^{\tau AQ}QF(u)d\tau,$$

其中 $u=u(\tau)=p(\tau;\Phi,p_0)+\Phi(p(\tau;\Phi,p_0))$. 不等式(27.41)换

为

$$|F(u)| \leqslant K'_4,$$

其中 K'_4 依赖于 $R(\omega)$、θ 和 ρ. 引理 2 当 $\alpha=0$ 时成立，不等式 (27.40)当 $\alpha=0$ 时成立；(27.42)换为

$$|\mathscr{T}\Phi(p_0)| \leqslant K'_5 \lambda_{N+1}^{-1},$$

其中 $K'_5=K'$. 因此，可取 $b=K'_5\lambda_{N+1}^{-1}$. 引理 4 将模 $|Av|$ 换为 $|v|$ 模，不等式(27.46)变为

$$|F(u_1)-F(u_2)| \leqslant K'_7[(1+l)|p_1-p_2|+\|\Phi_1-\Phi_2\|], \tag{27.78}$$

其中 $\|\Phi\|=\sup\{|\Phi(p)|: p\in PD(A)\}$.

令 $\Delta=p_1-p_2$，则(27.48)是相同的. 作(27.48)和 Δ 的内积，可得：

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\Delta|^2+|A^{\frac{1}{2}}\Delta|^2=-(P(F(u_1)-F(u_2)),\Delta).$$

从(27.78)可得：

$$\left|\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\Delta|^2+|A^{\frac{1}{2}}\Delta|^2\right| \leqslant K'_7(1+l)|\Delta|^2.$$

由此推出

$$\begin{aligned}|\Delta|\frac{d}{dt}|\Delta| &\geqslant -|A^{\frac{1}{2}}\Delta|^2-K'_7(1+l)|\Delta|^2\\ &\geqslant -\lambda_N|\Delta|^2-K'_7(1+l)|\Delta|^2.\end{aligned}$$

于是，有

$$|\Delta(\tau)| \leqslant |\Delta(0)|\exp(-\tau(\lambda_N+K_7(1+l))) \qquad \tau<0$$

代替不等式(27.51). 在引理 6 中对 ν_N 的假设能换为

$$|\mathscr{T}\Phi(p_{01})-\mathscr{T}\Phi(p_{02})| \leqslant L|p_{01}-p_{02}|,$$

其中 $L=K'_7(1+l)\Gamma_N^{-1}$. 事实上，

$$\begin{aligned}&|\mathscr{T}\Phi(p_{01})-\mathscr{T}\Phi(p_{02})|\\ &\leqslant \int_{-\infty}^{0}|e^{\tau AQ}|_{op}|F(u_1)-F(u_2)|d\tau\\ &\leqslant K'_7(1+l)|p_{01}-p_{02}|\\ &\quad\times\int_{-\infty}^{0}\exp(\tau(\lambda_{N+1}-\lambda_N-K'_7(1+l)))d\tau\end{aligned}$$

$$\leqslant K_7'(1+l)(\lambda_{N+1}-\lambda_N-K_7'(1+l))^{-1}|p_{01}-p_{02}|.$$

类似地，有

$$|\mathscr{T}\Phi_1(p_0)-\mathscr{T}\Phi_2(p_0)|\leqslant L'\|\Phi_1-\Phi_2\|,$$

其中 $L'=K_7'\lambda_{N+1}^{-1}+K_7(\lambda_N+K_7'(1+l)]^{-1}L$.

令 $L\leqslant l$, $L'\leqslant\frac{1}{2}$，则当 $l<\frac{1}{8}$ 时，且

$$K_{12}\leqslant\lambda_{N+1},\quad K_{13}\leqslant\lambda_{N+1}-\lambda_N, \tag{27.79}$$

$\mathscr{T}$ 映射 $\mathscr{F}_{b,l}$ 为 $\mathscr{F}_{b,l}$，且具有不动点. 定理证毕.

现考虑方程(27.25)的伽辽金近似方程

$$\frac{du_M}{dt}+Au_M+P_MF(u_M)=0, \tag{27.80}$$

其中 $F(u)=\theta_\rho(|Au|)R(u)$, u_M 取值在 $P_MD(A)$ 上.

关于伽辽金近似方程(27.80)，有如下定理：

定理 3 设定理 1 的假设成立，$l>0$ 和 N 满足定理 1 的条件，则对每个 $M>N$，方程(27.80)具有一个惯性流形 M_M. 它由 Lip 函数 Φ_M 的图构成，

$$\Phi_M:\quad P_MD(A)\to QP_MD(A)\subset QD(A).$$

Φ_M 的 Lip 常数 L 和定理 1 中 Φ: $PD(A)\to QD(A)$ 的 Lip. 常数相同. 最后，

$$\|\Phi_M-\Phi\|\leqslant 2K_6\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{4}}\lambda_{M+1}^{-\frac{1}{4}},$$

其中 $\|\Phi_M-\Phi\|=\sup\limits_{p\in PD(A)}|A\Phi_M(p)-A\Phi(p)|$.

§ 28 近似惯性流形

在前面有关整体吸引子和惯性流形的讨论中，我们看到，整体吸引子可能不光滑，惯性流形虽然光滑，但为了寻求它必须求无穷区间上的积分方程，这给实际计算带来不少麻烦. 因此，很自然地想到用一种近似的、光滑的、比较容易求的流形，去逼近整体吸引

子和惯性流形．这就是近期发展起来的近似惯性流形．下面以二维纳维–斯托克斯方程为例，来说明多种近似惯性流形及其误差估计．

设纳维–斯托克斯方程具有以下形式

$$\frac{du}{dt}+\nu Au+B(u,\ u)=f, \tag{28.1}$$

$$u(0)=u_0, \tag{28.2}$$

其中 $$Au=-P\Delta u, \qquad \forall u\in D(A)$$

$$B(u,\ w)=P[(u\cdot\nabla)w]. \qquad \forall u,\ w\in D(A)$$

这里 P 表示 $(L^2(\Omega))^2$ 到 H 的正交投影，H 表示 $\mathscr{V}$ 依 $(L^2(\Omega))^2$ 的闭包．当 $u|_{\partial\Omega}=0$ 时，$\mathscr{V}=\{v\in\{C_0^\infty(\Omega)\}^2,\ \mathrm{div}\, v=0\}$，这里 A 是线性无界自共轭算子，A^{-1} 是紧的，$D(A)$ 在 H 中稠．因此，H 具有由算子 A 的特征向量所组成的正交基 $\{w_j\}_{j=1}^\infty$，$Aw_j=\lambda_j w_j$，$j=1,\ 2,\ \cdots$，且

$$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\cdots.$$

λ_m 满足

$$C_0\lambda_1 m\leqslant\lambda_m\leqslant C_0\lambda_1 m, \qquad m=1,\ 2,\ \cdots\cdots \tag{28.3}$$

其中 C_0、C_1 为某确定常数．以下用 C_0，C_1，$\cdots$ 表示正绝对常数．

容易验证 $B(u,\ v)$ 满足

$$|(B(u,\ v),\ w)|\leqslant C_2|u|^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}}\|v\|^{\frac{1}{2}}|w|^{\frac{1}{2}}|w\|^{\frac{1}{2}},$$
$$\forall u、v、w\in V \tag{28.4}$$

$$|(B(u,\ v),\ w)|\leqslant C_3\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\|v\|\,|w|.$$
$$\forall u\in D(A),\ \forall v\in V,\ \forall w\in H \tag{28.5}$$

其中 $$u\in H, \qquad |u|^2=\int_\Omega|u(x)|^2dx;$$

$$u\in V, \qquad \|u\|^2=\int_\Omega|\nabla u(x)|^2dx.$$

由布雷齐斯–加卢特不等式，有

$$\|u\|^2_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C_4 \|u\|\left(1+\log\left(\frac{|Au|}{\lambda_1^{\frac{1}{2}}\|u\|}\right)\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \forall u \in D(A)$$

(28.6)

从(28.5)、(28.6)，有

$$|(B(u, v), w)| \leqslant C_5 \|v\| |w| \|u\|\left(1+2\log\left(\frac{|Au|}{\lambda_1^{\frac{1}{2}}\|u\|}\right)\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\forall u \in D(A),\ \forall v \in V,\ \forall w \in H \quad (28.7)$$

$$|(B(u, v), w)| \leqslant C_6 \|v\| |u| \|w\|\left(1+2\log\left(\frac{|Aw|}{\lambda_1^{\frac{1}{2}}\|w\|}\right)\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\forall u \in H,\ \forall v \in V,\ \forall w \in D(A) \quad (28.8)$$

另外，$B(u, v)$还满足如下基本等式

$$(B(u, v), w) = -(B(u, w), v),$$

$$\forall u \in H,\ \forall v、w \in D(A) \quad (*)$$

对于问题(28.1)、(28.2)的解 $u(t)$，已经证明，存在 t_0，它依赖于 u_0、ν、$|f|$ 和 λ_1，使

$$|u(t)| \leqslant M_0,\ \|u(t)\| \leqslant M_1, \qquad \forall t \geqslant t_0 \quad (28.9)$$

其中常数 M_0 与 M_1 仅依赖于 ν、$|f|$ 和 λ_1。

现考虑问题(28.1)、(28.2)的近似惯性流形。

设 P_m 为 H 在 $H_m=\mathrm{span}\{w_1, \cdots, w_m\}$ 上的正交投影。$Q_m = I-P_m$。令 $p=P_m u$，$q=Q_m u$，则(28.1)等价于

$$\frac{dp}{dt}+\nu Ap+P_m B(p+q, p+q)=P_m f, \qquad (28.10)$$

$$\frac{dq}{dt}+\nu Aq+Q_m B(p+q, p+q)=Q_m f. \qquad (28.11)$$

方程(28.1)的惯性流形是子集 $M \subset H$，具有如下性质：

(i) M 是有限维 Lip 流形. (28.12)

(ii) M 对流是正不变集. 即如 $u_0 \in M$，则(28.1)、(28.2)的解 $u(t) \in M$，$\forall t > 0$. (28.13)

(iii) M 指数吸引一切轨线. 即对(28.1)、(28.2)的任意解

$u(t)$，有 $\operatorname{dist}(u(t),\ \mu)\to 0$，$t\to\infty$ 指数逼近．由此推出整体吸引子 $\mathscr{A}\subset M$． (28.14)

如要求 M 是 Lip 函数 $\Phi: H_m\to Q_mH$ 的图，则不变条件(28.13)等价于对于(28.10)、(28.11)的任何解 $p(t)$、$q(t)$ 具有 $q(0)=\Phi(P(0))$，则 $q(t)=\Phi(p(t))$，$\forall t\geqslant 0$ 成立．因此，如果这样的函数 Φ 存在，则方程(28.10)、(28.11)在惯性流形 M 上等价于如下常微分方程组(称之为惯性形式)：

$$\frac{dp}{dt}+\nu Ap+P_mB(p+\Phi(p),\ p+\Phi(p))=P_mf, \qquad p\in H_m \tag{28.15}$$

为了用光滑流形逼近整体吸引子，我们引进近似惯性流形．

显然，在(28.15)中，如 $\Phi\equiv 0$，则得到通常的伽辽金近似：

$$\frac{du_m}{dt}+\nu Au_m+p_mB(u_m,\ u_m)=P_mf, \quad u_m\in H_m \tag{28.16}$$

现考虑引入有限维解析流形．$\mu_0=\operatorname{Graph}(\Phi_0)$，

$$\Phi_0(p)=(\nu A)^{-1}[Q_mf-Q_mB(p,\ p)] \qquad p\in H_m \tag{28.17}$$

作为整体吸引子的更好的逼近流形．

定理 1 设 m 充分大，使得

$$\lambda_{m+1}\geqslant\left(\frac{2C_2M}{\nu}\right)^2, \tag{28.18}$$

则对(28.10)、(28.11)的每个解 $u(t)=p(t)+q(t)$，满足

$$|q(t)|\leqslant K_0\lambda_{m+1}^{-1}L^{\frac{1}{2}}, \tag{28.19}$$

$$\|q(t)\|\leqslant K_1\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}, \tag{28.20}$$

$$|Aq(t)|\leqslant K_2L^{\frac{1}{2}}, \tag{28.21}$$

$$\left|\frac{dq}{dt}\right|\leqslant K_0'\lambda_{m+1}^{-1}L^{\frac{1}{2}}, \tag{28.22}$$

$$\|q(t)-\Phi_m(p(t))\|\leqslant K_1\lambda_{m+1}^{-1}L, \qquad \forall t\geqslant T_* \tag{28.23}$$

其中 $T_*>0$ 依赖于 ν、λ_1、$|f|$ 和 R_0，$|u(0)|\leqslant R_0$，

$$L=\left(\log\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)+1,$$

K_0、K_0'、K_1、K_2 是依赖于 ν、λ_1 和 $|f|$ 的正常数.

令 $\mathscr{B}=\{p\in H_m, |p|\leqslant 2M_1\}$，$\mathscr{B}^\perp=\{q\in Q_mV, \|q\|\leqslant 2M_1\}$，其中 M_1 满足(28.13). 当 m 充分大时，存在映射 Φ^s: $\mathscr{B}\to Q_mV$，满足

$$\Phi^s(p)=(\nu A)^{-1}[Q_mf-Q_mB(p+\Phi^s(p), p+\Phi^s(p))],$$

$$\forall p\in\mathscr{B}\quad(28.24)$$

令 $M^s=\text{Graph}\,\Phi^s$，它是 C 解析流形，且含有(28.1)的一切定常解. 现证明 Φ^s 的存在性，并给出它的上界.

定理2 设 m 充分大，使

$$\lambda_{m+1}\geqslant\max\left\{4r_2^2, \frac{r_2^2}{4M_1^2}\right\},\quad(28.25)$$

则存在唯一映射 Φ^s: $\mathscr{B}\to Q_mV$，满足(28.24)，且

$$\|\Phi^s(p)\|\leqslant\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}r_1,\quad(28.26)$$

其中 $$r_1=\nu^{-1}C_58M_1^2L^{\frac{1}{2}}+\nu^{-1}C_28M_1^2+\nu^{-1}\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}|f|,$$

$$r_2=[\nu^{-1}C_52M_1L^{\frac{1}{2}}+\nu^{-1}C_26M_1],$$

$$L=1+\log\frac{\lambda_m}{\lambda_1}.$$

证明 设 $p\in\mathscr{B}$ 为固定，定义 T_p: $\mathscr{B}^\perp\to Q_mV$，使

$$T_p(q)=(\nu A)^{-1}[Q_mf-Q_mB(p+q, p+q)].$$

要证明 T_p 具有唯一不动点，首先证明 T_p: $\mathscr{B}^\perp\to\mathscr{B}^\perp$. 令 $q\in\mathscr{B}^\perp$、$w\in H$、$|w|=1$，则

$$\begin{aligned}&|(A^{\frac{1}{2}}T_p(q), w)|\\&\leqslant\nu^{-1}[|(B(p+q, p+q), A^{-\frac{1}{2}}Q_mw)|+|A^{-1}Q_mf||w|]\\&\leqslant\nu^{-1}[|(B(p, p+q), A^{-\frac{1}{2}}Q_mw)|\\&\quad+|(B(q, p+q), A^{-\frac{1}{2}}Q_mw)|]+\nu^{-1}\lambda_{m+1}^{-1}|f|.\end{aligned}$$

由(28.7)和(28.4)，可得：

$$
\begin{aligned}
&|(A^{\frac{1}{2}}T_p(q),\ w)| \\
&\leqslant \nu^{-1}C_5\|p+q\|\,|A^{-\frac{1}{2}}Q_m w|\,\|p\|\left(1+\log\frac{|Ap|}{\|p\|\lambda_1^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad+\nu^{-1}C_2|q|^{\frac{1}{2}}\|q\|^{\frac{1}{2}}\|p+q\|\,|A^{-\frac{1}{2}}Q_m w|^{\frac{1}{2}}|w|^{\frac{1}{2}} \\
&\quad+(\nu\lambda_{m+1})^{-1}|f| \\
&\leqslant \nu^{-1}C_5 8M_1^2\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}\left(1+\log\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad+\nu^{-1}C_2\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}8M_1^2+(\nu\lambda_{m+1})^{-1}|f|.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\|T_p(q)\|\leqslant\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}r. \tag{28.27}
$$

由(28.25)，　　$\|T_p(q)\|\leqslant 2M_1.$

下面证明 T_p 是压缩的．考察

$$
\frac{\partial}{\partial q}T_p(q)\eta=(\nu A)^{-1}Q_m[B(p+q,\ \eta)+B(\eta,\ p+q)].
$$

$$
\forall\,\eta\in Q_mV
$$

设 $w\in H$，$|w|=1$，则有

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(A^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial q}T_p(q)\eta,\ w\right)\right| \\
&\leqslant \nu^{-1}|(B(p,\ \eta),\ A^{-\frac{1}{2}}Q_m w)|+\nu^{-1}|(B(q,\eta),\ A^{-\frac{1}{2}}Q_m w)| \\
&\quad+\nu^{-1}|(B(\eta,\ p+q),\ A^{-\frac{1}{2}}Q_m w)| \\
&\leqslant \nu^{-1}C_5\|\eta\|\,|A^{-\frac{1}{2}}Q_m w|\,\|p\|\left(1+\log\frac{|Ap|}{\lambda_1^{\frac{1}{2}}\|p\|}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad+\nu^{-1}C_2|q|^{\frac{1}{2}}\|q\|^{\frac{1}{2}}\|\eta\|\,|A^{-\frac{1}{2}}Q_m w|^{\frac{1}{2}}|w|^{\frac{1}{2}} \\
&\quad+\nu^{-1}C_2|\eta|^{\frac{1}{2}}\|\eta\|^{\frac{1}{2}}\|p+q\|\,|A^{-\frac{1}{2}}Q_m w|^{\frac{1}{2}}|w|^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant\left[\nu^{-1}C_5 2M_1\left(1+\log\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)\right)^{\frac{1}{2}}+\nu^{-1}C_2 6M_1\right]\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}\|\eta\|.
\end{aligned}
$$

因此，

$$\left\|\frac{\partial}{\partial q}T_p(q)\right\|_{\mathscr{L}(Q_mV)}\leqslant r_3\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}. \qquad (28.28)$$

由(28.25),从(28.28)推出

$$\left\|\frac{\partial}{\partial q}T_p(q)\right\|_{\mathscr{L}(Q_mV)}\leqslant\frac{1}{2}.$$

由压缩映射原理,推出存在唯一 $q(p)\in\mathscr{B}^{\perp}$,使 $q(p)=T_p(q)$. 令 $\Phi^s(p)=q(p)$. 由(28.27)推出(28.26), 且 $\mu^s=\mathrm{Grap}\,\Phi^s$ 为 C 解析流形, 每条轨线 $u(t)=p(t)+q(t)$ 位于流形 μ^s 的小邻域内, 整体吸引子也在这个邻域内.

定理 3 设 m 充分大, 使得(28.25)成立, 则对问题(28.10)、(28.11)的每一个解 $u(t)=p(t)+q(t)$, 有

$$\|q(t)-\Phi^s(p(t))\|\leqslant\frac{2K_0'}{\nu}\lambda_{m+1}^{-\frac{3}{2}}L^{\frac{1}{2}}, \quad \forall\, t\geqslant T_* \qquad (28.29)$$

其中 T_* 和 K_0' 为定理 1 中的常数.

证明 令 $\Delta(t)=q(t)-\Phi^s(p(t))$. 由(28.11)和(28.17), 有

$$\nu A\Delta+Q_m[B(\Delta,\ p+\Phi^s(p))+B(p+q,\ \Delta)]+\frac{dq}{dt}=0.$$

在 H 上作上述方程和 Δ 的内积. 由(*)得

$$\nu\|\Delta\|^2\leqslant|(B(\Delta,\ p+\Phi^s(p)),\Delta)|+\left|\left(\frac{dq}{dt},\ \Delta\right)\right|.$$

由(28.4),有

$$\nu\|\Delta\|^2\leqslant C_2|\Delta|\,\|\Delta\|\,\|p+\Phi^s(p)\|+\left|\frac{dq}{dt}\right|\,|\Delta|. \qquad (28.30)$$

当 $t>T_*$ 时, $\|p(t)\|\leqslant M_1$. 由定理 2, $\Phi^s(p(t))\leqslant 2M$. 将(28.22)代入(28.30),得

$$\nu\|\Delta\|^2\leqslant C_2\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}\|\Delta\|^2(M_1+2M_1)+K_0'\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}\|\Delta\|.$$

从(28.25),得

$$\|\Delta\|\leqslant\frac{2K_0'}{\nu}\lambda_{m+1}^{-\frac{3}{2}}L^{\frac{1}{2}}.$$

定理得证.

现考虑另一种近似 Φ^s,它可以逐次逼近, 显式求解. 有如下

定理

定理 4 设m充分大，使得(28.25)成立．如同定理 2 来定义 T_p: $\mathscr{B}^\perp \to \mathscr{B}^\perp$,

$$T_p(q) = (\nu A)^{-1}[Q_m f - Q_m B(p+q,\ p+q)]. \qquad \forall q \in \mathscr{B}^\perp$$

记

$$\begin{cases}\Phi_0^s(p) = T_p(0), & \text{当 } \forall p \in \mathscr{B} \text{ 时}, \\ \Phi_{n+1}^s(p) = T_p(\Phi_n^s(p)), & \text{当 } \forall p \in \mathscr{B};\ n = 0, 1, 2, \cdots \text{时},\end{cases} \tag{28.31}$$

则

$$\|\Phi^s(p) - \Phi_n^s(p)\| \leqslant (2r_2\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}})^{n+1}\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}\nu^{-1}[|f| + 4C_5M_1^2L^{\frac{1}{2}}]. \tag{28.32}$$

其中 r_2 为定理 2 中所定义.

证明 首先，注意到 $\Phi_0^s(p) \equiv \Phi_0(p)$，$\forall p \in \mathscr{B}$．由定理 2 和(28.28)、(28.25)，易得：

$$\|\Phi^s(p) - \Phi_n^s(p)\| \leqslant 2(r_2\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}})^{n+1}\|\Phi_0^s(p)\|. \tag{28.33}$$

因此，只要估计 $\|\Phi_0^s(p)\|$．从(28.31)，有

$$\Phi_0^s(p) = \Phi_0(p) = (\nu A)^{-1}[Q_m f - Q_m B(p,\ p)]. \tag{28.24}$$

则有
$$|A\Phi_0^s(p)| \leqslant \nu^{-1}|f| + \nu^{-1}|B(p,\ p)|.$$

由(28.4)，有

$$|A\Phi_0^s(p)| \leqslant \nu^{-1}|f| + \nu^{-1}C_5\|p\|^2\left(1 + \log\frac{|Ap|}{\|p\|\lambda_1^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$|A\Phi_0^s(p)| \leqslant \nu^{-1}|f| + \nu^{-1}C_5 4M_1^2L^{\frac{1}{2}}.$$

因此，

$$\|\Phi_0^s(p)\| \leqslant \lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}\nu^{-1}[|f| + 4C_5M_1^2L^{\frac{1}{2}}]. \tag{28.35}$$

联合(28.35)、(28.33)，推出(28.32)．

推论 1 设m充分大，使得(28.25)成立，则对问题(28.10)、(28.11)的每个解 $u(t) = p(t) + q(t)$，有

$$
\|q(t)-\Phi_n^s(p(t))\| \leqslant \lambda_{m+1}^{-\frac{3}{2}} \frac{2K_0'}{\nu} L^{\frac{1}{2}}
$$

$$
+2(r_2\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}})^{n+1}\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}\nu^{-1}[|f|+4C_5M_1^2L^{\frac{1}{2}}],
$$

$$
\forall t \geqslant T_*, \quad n=0, 1, 2, \cdots \qquad (28.36)
$$

其中 Φ_n^s 为(28.31)所确定，T_*、L 和 K_0' 如同定理 1，r_2 如同定理 2.

证明 这是定理 3 和定理 4 的推论.

为了估计通常有限维伽辽金方法逼近的误差，需要先证明如下引理.

引理 1 设 m 充分大，使得(28.25)成立，则对一切整数 $k \geqslant m+1$，有

$$
\|Q_k\Phi^s(p)\| \leqslant K_1\lambda_{k+1}^{-\frac{1}{2}}, \qquad (28.37)
$$

其中 $K_1 = \frac{16C_2M_1^2}{\nu}\left(1+\log\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{2}}+1$.

证明 从(28.24)，有

$$
\nu AQ_k\Phi^s(p)+Q_kB(p+\Phi^s(p), p+\Phi^s(p))=Q_kf.
$$

上式在 H 上作和 $\Phi^s(p)$ 的内积，得：

$$
\nu\|Q_k\Phi^s(p)\|^2 \leqslant |(B(p+\Phi^s(p), p+\Phi^s(p)), Q_k\Phi^s(p))|
$$

$$
+|f||Q_k\Phi^s(p)|,
$$

$$
\nu\|Q_k\Phi^s(p)\|^2 \leqslant |(B(p+P_k\Phi^s(p), p+\Phi^s(p)), Q_k\Phi^s(p))|
$$

$$
+|(B(Q_k\Phi^s(p), p+\Phi^s(p)), Q_k\Phi^s(p))|
$$

$$
+|f|Q_k\Phi^s(p)|.
$$

由(28.4)和(28.7)可得：

$$
\nu\|Q_k\Phi^s(p)\|^2 \leqslant C_5\|p+\Phi^s(p)\|^2|Q_k\Phi^s(p)|\left(1+\log\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{2}}
$$

$$
+C_2|Q_k\Phi^s(p)|\|Q_k\Phi^s(p)\|\|p+\Phi^s(p)\|
$$

$$
+|f||Q_k\Phi^s(p)|.
$$

从(28.26)和 $\mathscr{B}$ 的定义，有

$$\nu\|Q_k\Phi^s(p)\|\leqslant C_5 8M_1^2\lambda_{k+1}^{-\frac{1}{2}}\left(1+\log\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+C_2\sqrt{8}M_1\lambda_{k+1}^{-\frac{1}{2}}|Q_k\Phi^s(p)\|+\lambda_{k+1}^{-\frac{1}{2}}|f|.$$

由(28.25)推出(28.37)。

令 $k\geqslant m+1$，m 充分大，满足(28.25)。考虑通常的 k 阶伽辽金近似：

$$\frac{du_k}{dt}+\nu Au_k+P_kB(u_k,u_k)=P_kf.\quad u_k\in H_k\quad(28.38)$$

利用定理 2，容易证明方程(28.38)具有唯一解 $\Phi^{s,k}$: $\mathscr{B}\to P_kQ_mV$，它满足

$$\nu A\Phi^{s,k}(p)+P_kQ_mB(p+\Phi^{s,k}(p),\ p+\Phi^{s,k}(p))$$
$$=P_kQ_mf.\qquad\forall p\in\mathscr{B}\quad(28.39)$$

我们注意到 $\Phi^{s,k}$ 具有方程(28.38)一切定常解。

引理 2 设 m 充分大，使得(28.25)成立，则对一切整数 $k\geqslant m+1$，有

$$\|\Phi^s(p)-\Phi^{s,k}(p)\|\leqslant K_3\lambda_{k+1}^{-\frac{1}{2}},\qquad\forall p\in\mathscr{B}\quad(28.40)$$

其中

$$K_3=\left[1+\frac{(2C_2+C_3)}{\nu}2\sqrt{8}M_1\lambda_{k+1}^{-\frac{1}{2}}\left(1+\log\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]K_1,$$

K_1 为引理 1 中所定义。

证明 对 $p\in\mathscr{B}$，令 $u=p+\Phi^s(p)$，$v=p+\Phi^{s,k}(p)$，$\Delta=P_k(u-v)$，$\eta=Q_k(u-v)$，$u-v=\Delta+\eta$。由(28.21)和(28.39)，有

$$\nu A\Delta+P_kQ_m[B(u-v,\ u)+B(v,\ u-v)]=0,$$
$$\nu A\Delta+P_kQ_m[B(\Delta+\eta,\ u)+B(v,\ \Delta+\eta)]=0.$$

在 H 上和 Δ 作内积，并利用等式(*)，得

$$\nu\|\Delta\|^2\leqslant|(B(\Delta+\eta,\ u),\ \Delta)|+(B(v,\ \eta),\ \Delta)|.$$

由等式(*)，有

$$\nu\|\Delta\|^2\leqslant|(B(\Delta,\ u),\ \Delta)|+|(B(\eta,\ u),\ \Delta)|$$
$$+|(B(P_kv,\ \Delta),\ \eta)|+|(B(Q_kv,\ \Delta),\ \eta)|.$$

利用(28.4)、(28.8)、(28.7)，可得

$$\nu\|\Delta\|^2\leqslant C_2|\Delta||\Delta\|\|u\|+C_5|\eta|\|u\|\|\Delta\|\left(1+\log\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+C_5\|v\|\|\Delta\||\eta|\left(1+\log\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+C_2|Q_kv|^{\frac{1}{2}}\|Q_kv\|^{\frac{1}{2}}\|\Delta\||\eta|^{\frac{1}{2}}\|\eta\|^{\frac{1}{2}}. \tag{28.41}$$

由(28.26)推出$\|u\|\leqslant\sqrt{8}\,M_1$. 类似地，有$\|v\|\leqslant\sqrt{8}\,M_1$. 从(28.41)推出

$$\nu\|\Delta\|\leqslant C_2\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}\|\Delta\|\sqrt{8}\,M_1$$

$$+C_2 2\sqrt{8}\,M_1\|\eta\|\lambda_{k+1}^{-\frac{1}{2}}\left(1+\log\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+C_2\sqrt{8}\,M_1\|\eta\|\lambda_{k+1}^{-\frac{1}{2}}\left(1+\log\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

由(28.25)可得

$$\|\Delta\|\leqslant\frac{2(2C_5+C_2)}{\nu}\sqrt{8}\,M_1\|\eta\|\lambda_{k+1}^{-\frac{1}{2}}\left(1+\log\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{28.42}$$

由(28.37)和(28.42)推出(28.40).

定理 5 设m充分大，使(28.25)成立. 给定$k\geqslant m+1$，对任何$p\in\mathscr{B}$，定义T_p: $\mathscr{B}^\perp\to\mathscr{B}^\perp$，如同定理2，

$$T_p(q)=(\nu A)^{-1}[Q_mf-Q_mB(p+q,\ p+q)]. \qquad \forall q\in\mathscr{B}$$

令

$$\Phi_0^{s,k}(p)=P_kT_p(0), \qquad \forall p\in\mathscr{B} \tag{28.43}$$

$$\Phi_{m+1}^{s,k}(p)=P_kT_p(\Phi_n^{s,k}(p)), \qquad \forall p\in\mathscr{B};\ n=0,\ 1,\ 2\cdots$$

则

$$\|\Phi^{s,k}(p)-\Phi_n^{s,k}(p)\|$$

$$\leqslant 2(r_2\lambda_{k+1}^{-\frac{1}{2}})^{n+1}\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}\nu^{-1}[|f|+4C_5M_1^2L^{\frac{1}{2}}]. \tag{28.44}$$

更进一步，对问题(28.10)、(28.11)的解$u(t)=p(t)+q(t)$，我们

有

$$
\begin{aligned}
&\|q(t)-\Phi_*^{s,k}(p(t))\| \\
&\leqslant \frac{2K_0'}{\nu}\lambda_{m+1}^{-\frac{3}{2}}L^{\frac{1}{2}}+(2r_2\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}})^{n+1}\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}\nu^{-1} \\
&\quad \times[|f|+4C_5M_1^2L^{\frac{1}{2}}]+K_2\lambda_{k+1}^{-\frac{1}{2}}. \\
&\qquad\qquad \forall t\geqslant T_*,\ n=0,1,2,\cdots. \qquad (28.45)
\end{aligned}
$$

其中 T_*、L 和 K_0' 如同在定理 1 中，r_2 如同在定理 2 中，K_3 如同引理 2 中.

证明 为得到(28.44)，我们重复定理 4 的证明，只要将 Φ^s 换为 $\Phi^{s,k}$ 即可. 估计式(28.45)是(28.29)、(28.40)和(28.44)的直接推论.

§29 非线性伽辽金方法

在有关混沌、惯性流形和整体吸引子等 $t\to\infty$ 时的数值计算中，通常的计算方法是不适当的，这是因为它具有形式 $c(h)e^T$ 的误差估计，其中 $c(h)$ 是一个与 h 有关的适当小的常数，但当 $T\to\infty$ 时，就可能导致很大的误差. 从理论上，也必须建立起 $t\to\infty$ 时的近似解的误差估计及收敛性. 一种新型的数值方法——非线性伽辽金方法现已应运而生，而且在长时间的数值计算中显示出巨大的优越性. 本节将以一类非线性演化方程为例，来说明这种方法.

设非线性演化方程具有如下形式：

$$\frac{du}{dt}=-\nu Au-R(u), \qquad (29.1)$$

其中

$$R(u)=B(u)+Cu-f, \qquad (29.2)$$

这里 $\nu>0$ 是粘性参数，算子 A 是在希尔伯特空间上的线性无界自共轭算子；A 是正的和闭的，$D(A)$ 在 H 中是稠的. 定义 A 的

幂 A^s, $s\in\mathbb{R}$; $D(A^s)$具模 $|A^s\cdot|$，是希尔伯特空间. 定义 $V=D(A^{\frac{1}{2}})$, $\|\cdot\|=|A^{\frac{1}{2}}\cdot|$.

因 A^{-1} 是紧的和自共轭的，因此存在 H 的正交基 $\{w_j\}$，它是由 A 的特征向量所组成：

$$Aw_j=\lambda_j w_j, \tag{29.3}$$

其中 $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots$, $\lambda_j\to\infty$, $j\to\infty$.

非线性项 $R(u)$满足(29.2)，其中 $B(u)=B(u, u)$, $B(\cdot, \cdot)$ 是从 $V\times V$ 到 V' 上的双线性算子. C 是从 V 到 H 的线性算子，$f\in H$. 令 b 表示在 V 上的三线性形式

$$b(u, v, w)=(B(u, v), w)_{V',V}. \qquad \forall u, v, w\in V$$

设

$$b(u, v, w)=-b(u, w, v), \quad (\forall u, v, w\in V) \tag{29.4}$$

$$|b(u, v, w)|\leqslant C_1|u|^{\frac{1}{2}}\cdot\|u\|^{\frac{1}{2}}\|v\|\cdot|w|^{\frac{1}{2}}\cdot\|w\|^{\frac{1}{2}}, \quad (\forall u, v, w\in V) \tag{29.5}$$

$$|Cu|\leqslant C_2\|u\|, \qquad (\forall u\in V) \tag{29.6}$$

其中 C_1、C_2 以及以后 $C_i(i>2)$均表示正常数. 再假设 B 映射 $V\times D(A)$到 B, 有

$$|B(u, v)|\leqslant C_3|u|^{\frac{1}{2}}\cdot\|u\|^{\frac{1}{2}}\cdot\|v\|^{\frac{1}{2}}\cdot|AV|^{\frac{1}{2}}, \tag{29.7}$$

$$|B(u,v)|\leqslant C_4|u|^{\frac{1}{2}}\cdot|Au|^{\frac{1}{2}}\cdot\|v\|. \qquad \forall u\in V, \ v\in D(A) \tag{29.8}$$

最后，设 $\nu A+C$ 是正的，即有

$$((\nu A+C)u, u)\geqslant\alpha\|u\|^2, \qquad \forall u\in D(A) \tag{29.9}$$

其中 $\alpha>0$. 对于(29.1)，考虑具初值

$$u(0)=u_0 \qquad u_0\in H \tag{29.10}$$

的柯西问题. 可以证明，问题(29.1)、(29.10)具有唯一解 $u(t)$, $t>0$; 而且，

$$u\in\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; H)\cap L^2(0, T; V). \qquad \forall T>0$$

更进一步，如 $u_0 \in V$，则有

$$r \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+;\ H) \cap L^2(0,\ T;\ D(A)). \qquad \forall T>0$$

现寻求问题(29.1)、(29.10)如下形式的近似解

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{j_m}(t) w_j,$$

$$u_m:\quad R^+ \to w_m = \operatorname{span}\{w_1,\ \cdots,\ w_m\}.$$

函数 u_m 连同另一未知函数 z_m 一起求解，其中

$$z_m(t) = \sum_{j=m+1}^{2m} h_{j_m}(t) w_j,$$

$$z_m:\quad \mathbb{R}^+ \to \widetilde{\omega}_m = \operatorname{span}\{w_{m+1},\ \cdots,\ w_{2m}\},$$

$(u_m,\ z_m)$满足

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(u_m,\ v) + \nu((u_m,\ v)) + (Cu_m,\ v) + b(u_m,\ u_m,\ v) \\
&\quad + b(z_m,\ u_m,\ v) + b(u_m,\ z_m,\ v) \\
&= (f,\ v), \qquad \forall v \in w_m \qquad (29.11)
\end{aligned}$$

$$\nu((z_m,\ \tilde{v})) + (cz_m, \tilde{v}) + b(u_m,\ u_m,\ \tilde{v}) = (f,\ \tilde{v}), \qquad \forall \tilde{v} \in \widetilde{\omega}_m \qquad (29.12)$$

连同

$$u_m(0) = P_m u_0, \qquad (29.13)$$

其中 P_m 表示 H 在 w_m 上的正交投影.

方程组(29.11)、(29.12)等价于 u_m 的一个常微分方程. 事实上，(29.12)对 z_m 是线性的，能写为

$$\nu A z_m + (P_{2m} - P_m) C z_m = (P_{2m} - P_m)(f - B(u_m)). \qquad (29.14)$$

由于假设(29.9)，保证算子 $\nu A + (P_{2m} - P_m)C$ 在 $\widetilde{\omega}_m$ 上是强制的和可逆的，因此 z_m 可显式求解为

$$z_m = (\nu A + (P_{2m} - P_m)C)^{-1}(P_{2m} - P_m)(f - B(u_m)). \qquad (29.15)$$

因此，方程组(29.11)、(29.12)等价于常微分方程组

$$\frac{du_m}{dt}+\nu Au_m+p_m(Cu_m+B(u_m)+B(u_m,z_m))=p_m f,$$
(29.16)

其中 z_m 是(29.15)所给定．显然，当 $z_m=0$ 时，即为古典的伽辽金方法．

问题(29.16)、(29.13)的解 $u_m(t)$ 在最大时间区间$[0, T_m]$的存在唯一性，由标准的常微分方程理论可得到．在以下的先验估计中，可知 $T_m=+\infty$．因而我们可考虑 $m\to+\infty$ 时近似解的收敛性．

定理 1 设满足(29.4)、(29.9)，u_0 给定于 H 中，则问题(29.16)、(29.13)的解 u_m 当 $m\to\infty$ 时收敛于问题(29.1)、(29.10)的解 u．即有

$$\begin{aligned}&u_m\to u \text{ 依 } L^2(0,T;V)\text{ 和 } L^p(0,T;H)\text{ 中强收敛},\\&\text{对一切 } T>0,\ 1\leqslant p<+\infty,\\&u_m\to u \text{ 依 } L^\infty(R^+;H)\text{ 弱 * 收敛}.\end{aligned}\tag{29.17}$$

为了证明定理 1，我们对(29.11)、(29.12)的解作先验估计．

取 $v=u_m$ 在(29.11)中，$\tilde{v}=z_m$ 在(29.12)中，并将两等式相加，并由(29.14)得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m|^2+\nu\|u_m\|^2+(Cu_m,\ u_m)+\nu\|z_m\|^2\\&\quad+(Cz_m,\ z_m)=(f,\ u_m+z_m).\end{aligned}\tag{29.18}$$

由(29.9)，有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m|^2+\alpha(\|u_m\|^2+\|z_m\|^2)\leqslant|f|\cdot|u_m+z_m|.$$
(29.19)

因

$$\|v\|=|A^{\frac{1}{2}}v|\geqslant\lambda_1^{\frac{1}{2}}|v|,\qquad\forall v\in V\tag{29.20}$$

则从(29.19)推得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m|^2+\alpha(\|u_m\|^2+\|z_m\|^2)\leqslant\lambda_1^{-\frac{1}{2}}|f|\cdot\|u_m+z_m\|$$

$$\leqslant \frac{\alpha}{2}(\|u_m\|^2+\|z_m\|^2)+\frac{1}{\alpha\lambda_1}|f|^2,$$

$$\frac{d}{dt}|u_m|^2+\alpha\lambda_1|u_m|^2\leqslant\frac{2}{\alpha\lambda_1}|f|^2. \qquad (29.21)$$

积分之，得

$$|u_m(t)|^2\leqslant|u_m(0)|^2e^{-\alpha\lambda_1 t}+\frac{2|f|^2}{\lambda_1^2\alpha^2}(1-e^{-\alpha\lambda_1 t}), \qquad \forall t\geqslant 0$$

因此，

当 $m\to+\infty$ 时，序列 u_m 在 $L^\infty(R^+;H)$ 中有界， (29.22)

回到(29.21)．对 t 从$[0, T]$上积分，可得

$\forall T>0$，当 $m\to\infty$ 时，u_m 和 z_m 依 $L^2(0,T;V)$ 有界．(29.23)

现对 z_m 进行估计．在(29.12)中取 $\tilde{v}=z_m$，有

$$\nu\|z_m\|^2+(Cz_m, z_m)=-b(u_m, u_m, z_m)+(f, z_m).$$

由(29.3)、(29.7)，可得

$$\alpha\|z_m\|^2\leqslant|B(u_m)|\cdot|z_m|+|f|\cdot|z_m|$$

$$\leqslant C_3|u_m|^{\frac{1}{2}}\|u_m\|\cdot|Au_m|^{\frac{1}{2}}\cdot|z_m|+|f|\cdot|z_m|. \qquad (29.24)$$

因 $u_m\in w_m$，$z_m\in\tilde{w}_m$，有

$$|Au_m|\leqslant\lambda_m^{\frac{1}{2}}\|u_m\|, \qquad \|u_m\|\leqslant\lambda_m^{\frac{1}{2}}|u_m|, \qquad (29.25)$$

$$|Az_m|\geqslant\lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}}\|z_m\|, \qquad \|z_m\|\geqslant\lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}}|z_m|. \qquad (29.26)$$

联合这些不等式，由(29.24)，可得

$$\alpha\lambda_{m+1}|z_m|^2\leqslant C_3\lambda_m|u_m|^2\cdot|z_m|+|f|\cdot|z_m|,$$

$$\alpha\lambda_{m+1}|z_m|\leqslant C_3\lambda_m|u_m|^2+|f|. \qquad (29.27)$$

由(29.22)，有

当 $m\to+\infty$ 时 z_m 依 $L^\infty(R^+;H)$ 有界． (29.28)

由(29.25)、(29.26)，从(29.24)，有

$$\alpha\lambda_{m+1}|z_m|\leqslant C_3\lambda_m^{\frac{1}{2}}|u_m|\cdot\|u_m\|+|f|.$$

因 $\lambda_1\leqslant\lambda_m\leqslant\lambda_{m+1}$，有

$$\alpha\lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}}|z_m|\leqslant C_3|u_m|\cdot\|u_m\|+\lambda_1^{-\frac{1}{2}}\cdot|f|.$$

由此不等式，以及(29.22)、(29.23)，可知：

$$\forall T>0,\ \lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}}z_m \text{ 当 } m\to+\infty \text{ 时}$$
$$\text{依 } L^2(0,\ T;\ H)\text{ 保持有界。} \tag{29.29}$$

现估计 $\frac{du_m}{dt}$. 由(29.4)、(29.5)，有

$$\|B(u,\ v)\|_{V'}\leqslant C_1|u|^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}}|v|^{\frac{1}{2}}\|v\|^{\frac{1}{2}}.\qquad \forall u,\ v\in V$$

因此，由估计(29.22)、(29.23)和(29.28)推出 $B(u_m)$、$B(z_m,\ u_m)$ 和 $B(u_m,\ z_m)$依 $L^2(0,\ T;\ V')$有界. 因此，由微分方程(29.14)得出

$$\forall T>0,\ \frac{du_m}{dt} \text{ 当 } m\to\infty \text{ 时依 } L^2(0,T;V')\text{ 有界.} \tag{29.30}$$

现在证明近似解 u_m 当 $m\to\infty$ 时的收敛性. 因 $m\to\infty$ 时，$\lambda_m\to+\infty$，由(29.29)推出

$$\forall T>0,\ z_m\to0 \text{ 依 } L^2(0,\ T;\ H)\text{强收敛},\ m\to+\infty. \tag{29.31}$$

因此，由(29.23)和(29.28)，有

$$\forall T>0,\ z_m\to0,\ \text{依 } L^2(0,\ T;\ V)\text{弱收敛};$$
$$\text{依 } L^\infty(R^+,\ H)\text{弱}*\text{收敛.} \tag{29.32}$$

现在研究序列 u_m 的收敛性. 估计(29.22)、(29.23)和(29.30)，推出存在元素 u^* 和子序列 $m'\to+\infty$，使

$$u_{m'}\to u^* \text{ 在 } L^2(0,\ T;\ V)\text{中弱收敛},\ \forall T>0;$$
$$\text{依 } L^\infty(R^+;\ H)\text{弱}*\text{收敛},\ m'\to+\infty, \tag{29.33}$$
$$\frac{du_{m'}}{dt}\to\frac{du^*}{dt} \text{ 在 } L^2(0,\ T;\ V')\text{中弱收敛},\ \forall T>0,\ m'\to+\infty.$$

由古典的列紧性原理，从(29.33)可得

$$\forall T>0,\ u_{m'}\to u^* \text{ 依 } L^2(0,T;\ H)\text{强收敛},\ m'\to+\infty. \tag{29.34}$$

由(29.31)～(29.34)，我们可在(29.11)式中取极限. 唯一的困难是双线性项. 令 $v\in w_m$ 为固定的，且 $m'\geqslant m$，从(29.4)可知

$$b(u_{m'},\ u_{m'},\ v)=-b(u_{m'},\ v,\ u_{m'}).$$

基于(29.7)，$b(\cdot, v, \cdot)$是从$V\times H$到$\mathbb{R}$的双线性连续形式，因此，由(29.33)、(29.34)推出

$$b(u_{m'}, v, u_{m'})\to b(u^*, v, u^*)\text{ 依 }L^1(0, T)\text{强收敛}, \forall T>0, m'\to+\infty.$$

因此

$$b(u_{m'}, u_{m'}, v)\to b(u^*, u^*, v)\text{ 依 }L^1(0, T)\text{强收敛}, \forall T>0, m'\to+\infty.$$

类似地，有

$$b(z_{m'}, u_{m'}, v)\to b(0, u^*, v)=0, \qquad m'\to+\infty$$

$$b(u_{m'}, z_{m'}, v)\to b(u^*, 0, v)=0. \qquad m'\to+\infty$$

其中依$L^1(0, T)$强收敛，$\forall T>0$. 因此，我们找到极限函数u^*，满足

$$\frac{d}{dt}(u^*, v)+\nu((u^*, v))+(cu^*, v)+b(u^*, u^*, v)$$
$$=(f, v), \tag{29.35}$$

对一切$v\in w_m$. 由连续性，$\forall v\in V$成立. 进一步，由(29.33)可得

$$u_{m'}(0)\to u^*(0)\text{，在 }H\text{ 中弱收敛.} \tag{29.36}$$

因$u_{m'}(0)=P_{m'}u_0$，从(29.36)推得

$$u^*(0)=u_0. \tag{29.37}$$

由(29.35)、(29.36)可知，u^*是问题(29.1)、(29.10)的解，因此$u^*=u$. 依(29.33)可知，序列u_m收敛于u.

为了完成定理1的证明，必须验证在(29.17)中的强收敛性。为此，引入表达式

$$X_m=\frac{1}{2}|u_m(T)-u(T)|^2$$
$$+\int_0^T\{\nu\|u_m-u\|^2+(c(u_m-u), u_m-u)$$
$$+\nu\|z_m\|^2+(cz_m, z_m)\}dt.$$

只要充分地证明

$$\lim_{m\to+\infty}X_m=0, \tag{29.38}$$

即证明了定理. 事实上, 由于(29.9)、(29.38)给出 u_m 依 $L^2(0, T; V)$强收敛于 u, 同时还有

$$u_m(t) \to u(t) \text{在} H \text{中强收敛}, \forall t \geq 0, \tag{29.39}$$

由(29.39)并利用(29.22)和 Lebesque 控制收敛定理, 可知 u_m 依 $L^p(0, T; H)$ $(\forall p \in [1, \infty))$强收敛于 u. 另外, 我们也注意到, 除了(29.17)u_m 的强收敛结果外, (29.38)还得到

$$z_m \to 0 \text{ 依 } L^2(0, T; V)\text{强收敛}. \ \forall T>0, \ m \to +\infty. \tag{29.40}$$

现在证明(29.38). 积分(29.18)从 0 到 T, 可得

$$\frac{1}{2}|u_m(T)|^2 + \int_0^T \{\nu \|u_m\|^2 + (cu_m, u_m) + \nu \|z_m\|^2 + (cz_m, z_m)\} dt$$
$$= \frac{1}{2}|u_m(0)|^2 + \int_0^T (f, u_m + z_m) dt.$$

X_m 可改写为

$$\begin{aligned} X_m = &-(u_m(T), u(T)) + \frac{1}{2}|u(T)|^2 + \frac{1}{2}|u_m(0)|^2 \\ &+ \int_0^T \{-2\nu((u_m, u)) + \nu\|u\|^2(-cu, u_m - u) \\ &-(cu_m, u) + (f, u_m + z_m)\} dt. \end{aligned} \tag{29.41}$$

利用(29.31)、(29.33), 在(29.41)中取极限, 可得

$$\begin{aligned} \lim_{m \to +\infty} X_m = &-\frac{1}{2}|u(T)|^2 + \frac{1}{2}|u_0|^2 \\ &+ \int_0^T \{-\nu\|u\|^2 - (cu, u) + (f, u)\} dt. \end{aligned}$$

由(29.35), 并用 u、u 代替 u^*、v, 可知上式极限为 0, 即得(29.38). 定理证毕.

为了在更强的拓扑下改善非线性伽辽金方法的收敛性, 我们证明如下定理:

定理 2 设(29.4)~(29.9)满足, 对于给定 $u_0 \in V$, 问题(29.16)、(29.13)的解 u_m 当 $m \to +\infty$ 时在如下意义下收敛于问题(29.1)、(29.10)的解:

$u_m \to u$ 依 $L^2(0, T; D(A))$ 和 $L^p(0, T; V)$ 强收

敛, $T>0,\ 1\leqslant p<\infty$, (29.42)

$u_m \to u$ 依 $L^\infty(\mathbb{R}^+; V)$ 弱 * 收敛,

证明 证明取决于 u_m 和 z_m 进一步的先验估计. 先证明 $u_m \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V)$. 令 $v=Au_m$ 于(29.11)、$\tilde{v}=Az_m$ 于(29.12), 相应的项相加, 可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|^2+\nu|Au_m|^2+\nu|Az_m|^2 \\
&=(f,\ A(u_m+z_m))-(Cu_m,\ Au_m) \\
&\quad -(Cz_m,\ Az_m)-b(u_m,\ u_m,\ Au_m) \\
&\quad -b(z_m,u_m,Au_m)-b(u_m,z_m,Au_m) \\
&\quad -b(u_m,\ u_m,\ Az_m).
\end{aligned}
\tag{29.43}
$$

对(29.43)右端的各项可作如下估计:

$$
|(f,\ A(u_m+z_m))|\leqslant\frac{\nu}{12}(|Au_m|^2+|Az_m|^2)+\frac{6}{\nu}|f|^2.
\tag{29.44}
$$

由(29.6), 有

$$
\begin{aligned}
|(Cu_m,\ Au_m)|&\leqslant C_2\|u_m\|\cdot|Au_m| \\
&\leqslant\frac{\nu}{12}|Au_m|^2+\frac{3C_2^2}{\nu}\|u_m\|^2,
\end{aligned}
\tag{29.45}
$$

$$
\begin{aligned}
|(Cz_m,\ Az_m)|&\leqslant C_2\|z_m\|\cdot|Az_m| \\
&\leqslant\frac{\nu}{12}|Az_m|^2+\frac{3C_2^2}{\nu}\|z_m|^2.
\end{aligned}
\tag{29.46}
$$

用(29.7)估计三线性项的界, 有

$$
\begin{aligned}
|b(u_m,\ u_m,\ Au_m)|&\leqslant|B(u_m,\ u_m)|\cdot|Au_m| \\
&\leqslant C_3|u_m|^{\frac{1}{2}}\cdot\|u_m\|\cdot|Au_m|^{\frac{3}{2}} \\
&\leqslant\frac{\nu}{12}|Au_m|^2+\frac{C_5}{\nu}|u_m|^2\cdot\|u_m\|^4,
\end{aligned}
\tag{29.47}
$$

其中 C_5 为绝对常数. 类似地,

$$|b(z_m, u_m, Au_m)| \leqslant \frac{\nu}{12}|Au_m|^2 + \frac{C_5}{\nu}|z_m|^2\|z_m\|^2 \cdot \|u_m|^2,$$

$$\begin{aligned}
&|b(u_m, z_m, Au_m)| \\
&\leqslant C_3 |u_m|^{\frac{1}{2}} \|u_m\|^{\frac{1}{2}} \|z_m\|^{\frac{1}{2}} |Az_m|^{\frac{1}{2}} \cdot |Au_m| \\
&\leqslant \frac{\nu}{12}|Au_m|^2 + \frac{C_6}{\nu}|u_m| \cdot \|u_m\| \cdot \|z_m\| \cdot |Az_m| \\
&\leqslant \frac{\nu}{12}|Au_m|^2 + \frac{\nu}{12}|Az_m|^2 + \frac{C_7}{\nu^3}|u_m|^2\|u_m\|^2\|z_m\|^2.
\end{aligned} \tag{29.48}$$

(29.48)右端的最后一项可估计为

$$\begin{aligned}
&|b(u_m, u_m, Az_m)| \\
&\leqslant C_3 |u_m|^{\frac{1}{2}} \cdot \|u_m\| \cdot |Au_m|^{\frac{1}{2}} \cdot |Az_m| \\
&\leqslant \frac{\nu}{12}|Au_m|^2 + \frac{\nu}{12}|Az_m|^2 + \frac{C_7}{\nu^3}|u_m|^2 \cdot \|u_m\|^4.
\end{aligned} \tag{29.49}$$

联合以上不等式，由(29.43)可得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|u_m\|^2 + \nu|Au_m|^2 + \nu|Az_m|^2 \\
&\leqslant \frac{12}{\nu}|f|^2 + \frac{6C_2^2}{\nu}\|z_m\|^2 + C_8\|u_m\|^2 \\
&\quad \cdot (1 + |u_m|^2 \cdot \|u_m\|^2 + |z_m|^2 \cdot \|z_m\|^2 + |u_m|^2 \cdot \|z_m\|^2),
\end{aligned} \tag{29.50}$$

其中 $C_8 = C_8(\nu)$ 依赖于 ν. (29.50) 可写为如下的微分不等式

$$\frac{dy_m}{dt} \leqslant g_m y_m + h_m, \tag{29.51}$$

其中

$$\begin{aligned}
y_m(t) &= \|u_m(t)\|^2, \\
h_m(t) &= \frac{12}{\nu}|f|^2 + \frac{6C_2^2}{\nu}\|z_m\|^2, \\
g_m(t) &= C_8(1 + |u_m|^2\|u_m(t)\|^2 + |z_m(t)|^2\|z_m\|^2 \\
&\quad + |u_m(t)|^2\|z_m(t)\|^2).
\end{aligned} \tag{29.52}$$

由(29.51)积分，可得

$$y_m(t)\leqslant y_m(0)\exp\left(\int_0^t g_m(s)\,ds\right)$$

$$+\int_0^t h_m(s)\exp\left(\int_s^t g_m(\sigma)\,d\sigma\right)ds. \qquad \forall t\geqslant 0 \tag{29.53}$$

这个不等式联合(29.22)、(29.23)和(29.28)，可知 u_m 在 $L^\infty(0,T;V)$中对一切 $T>0$ 保持有界.

而 $\|u_m(t)\|^2$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上的有界性，可由如下的一致伽辽金不等式得到：

引理 1 设 $g(t)$、$h(t)$、$y(t)$是三个在$(t_0,+\infty)$上局部可积的正函数，且满足

$$\frac{dy}{dt}\in L^1_{loc}([t_0,\infty]),\ \frac{dy}{dt}\leqslant gy+h, \qquad t\geqslant t_0 \tag{29.54}$$

$$\int_t^{t+1} g(s)ds\leqslant a_1,\ \int_t^{t+1} h(s)ds\leqslant a_2,\ \int_t^{t+1} y(s)dt\leqslant a_3, \qquad t\geqslant t_0$$

其中 a_i 为正常数$(i=1,2,3)$，则

$$y(t)\leqslant(a_3+a_2)\exp(a_1). \qquad \forall t\geqslant t_0+1 \tag{29.55}$$

现回到(29.51). 我们发现，由于前面的先验估计，引理 1 的假设是成立的. 由于 u_m, z_m 在 $L^\infty(\mathbb{R}^+;H)$中有界，(29.21)对 t 从 t 到 $t+1$ 积分，可知

$$\int_t^{t+1}(\|u_m\|^2+\|z_m\|^2)ds\leqslant C_8', \tag{29.56}$$

其中常数 C_8' 与 m 无关. 推之，在(29.52)中，函数 y_m、g_m、h_m 满足(29.54)，其中常数 a_1、a_2、a_3 均与 m 无关. 因此，从(29.55)可得

$$y_m(t)=\|u_m(t)\|^2\leqslant C_9, \qquad \forall t\geqslant 1 \tag{29.57}$$

其中 $C_9=C_9(\nu)$ 与 m 无关.

因此，(29.57)给出 $t\geqslant 1$ 时 $\|u_m(t)\|$ 一致的界，而(29.53)给出 $\|u_m(t)\|$ 在 $t\in[0,1]$上的一致的界. 于是，

$$u_m(t)\text{依 } L^\infty(R^+;H)\text{保持有界}, m\to+\infty. \tag{29.58}$$

积分(29.50)，可得

$\forall T>0$, u_m 和 z_m 依 $L^2(0, T; D(A))$ 保持有界, $m\to+\infty$.

(29.59)

下面对序列 z_m 进行估计，希望得到类似(29.59)的估计．在(29.12)中，取 $\tilde{v}=Az_m$，可得

$$\nu|Az_m|^2=-(Cz_m, Az_m)-b(u_m, u_m, Az_m)+(f, Az_m)$$

$$\leqslant C_2\|z_m\|\cdot|Az_m|+C_3|u_m|^{\frac{1}{2}}\|u_m\|$$

$$\cdot|Au_m|^{\frac{1}{2}}|Az_m|+|f|\cdot|Az_m|,$$

$$\nu|Az_m|\leqslant C_2\|z_m\|+C_3|u_m|^{\frac{1}{2}}\cdot\|u_m\||Au_m|^{\frac{1}{2}}+|f|.$$

则由(29.25)、(29.26)，有

$$\nu\lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}}\|z_m\|\leqslant C_2\|z_m\|+C_3\lambda_m^{\frac{1}{4}}|u_m|^{\frac{1}{2}}\|u_m\|^{\frac{3}{2}}+|f|.$$

对于大的 m，有

$$\|z_m\|\leqslant\frac{1}{\nu\lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}}-C_2}(C_3\lambda_m^{\frac{1}{4}}|u_m|^{\frac{1}{2}}\cdot\|u_m\|^{\frac{3}{2}}+|f|).$$

这个不等式连同(29.58)，可得

$$z_m\to0 \text{ 依 } L^\infty(R^+; V) \text{ 强收敛}, m\to+\infty. \tag{29.60}$$

最后，我们需要估计 $\frac{du_m}{dt}$．从(29.7)和(29.58)—(29.60)可得到 $B(u_m)$、$B(z_m, u_m)$ 和 $B(u_m, z_m)$ 在 $L^4(0, T; H)$ 中一致对 m 有界，而 Au_m 在 $L^2(0, T; H)$ 中一致有界．因此，由(29.16)推出

$$\forall T>0,\ \frac{du_m}{dt} \text{ 依 } L^2(0, T; H) \text{ 保持有界}, m\to+\infty. \tag{29.61}$$

(29.42)的收敛性结果来自估计(29.58)～(29.61)．首先，联合我们以前的收敛性结果(29.17)，当 $m\to+\infty$ 时，我们有

$$u_m\longrightarrow u \text{ 依 } L^2(0, T; D(A)) \text{ 弱收敛}, \quad \forall T>0 \tag{29.62}$$

$$u_m\longrightarrow u \text{ 依 } L^\infty(R^+, V) \text{ 弱*收敛}, \tag{29.63}$$

$$\frac{du_m}{dt}\longrightarrow\frac{du}{dt} \text{ 依 } L^2(0, T; H) \text{ 弱收敛}, \forall T>0 \tag{29.64}$$

$$z_m\longrightarrow0 \text{ 依 } L^2(0, T; D(A)) \text{ 弱收敛}, \quad \forall T>0 \tag{29.65}$$

由此推出(29.47)的弱收敛. 为了给出(29.42)强收敛的结果, 引入表达式

$$Y_m = \frac{1}{2}\|u_m(T)-u(T)\|^2 + \nu\int_0^T (|Au_m - Au|^2 + |Az_m|^2)dt.$$

只须充分地证明

$$\lim_{m\to+\infty} Y_m = 0$$

即可. 事实上, 依 $L^p(0, T; V)$ 的强收敛来自估计(29.58)和 lebesque 控制收敛定理. (29.43)从 0 到 T 积分, 有

$$\frac{1}{2}\|u_m(T)\|^2 + \nu\int_0^T (|Au_m|^2 + |Az_m|^2)ds = z_m + \frac{1}{2}\|u_{0m}\|^2,$$

$$\begin{aligned} z_m = \int_0^T \{&(f, A(u_m+z_m)) - (Cu_m, Au_m) - (Cz_m, Az_m) \\ &- b(u_m, u_m, Au_m) - b(z_m, u_m, Au_m) \\ &- b(u_m, z_m, Au_m) - b(u_m, u_m, Az_m)\}ds. \end{aligned} \qquad (29.66)$$

因此, Y_m 可改写为

$$Y_m = -((u_m(T), u(T))) + \frac{1}{2}\|u(T)\|^2 + \frac{1}{2}\|u_{0m}\|^2 + \nu\int_0^T (-2(Au_m, Au) + |Au|^2)ds + z_m.$$

另从(29.62)和(29.64)得到

$$\lim_{m\to+\infty} \{-((u_m(T), u(T))\} - 2\nu\int_0^T (Au_m, Au)ds = -\|u(T)\|^2 - 2\nu\int_0^T |Au|^2 ds.$$

其次, 利用 u_m 和 z_m 依 $L^2(0, T; D(A))$ 的弱收敛性, 依 $L^4(0, T; V)$ 的强收敛性以及依 $L^\infty(0, T; V)$ 的有界性, 可得到 $\lim\limits_{m\to+\infty} z_m$. 特别地, 在(29.66)中, 不同的三线性项极限求法是类似的. 这里仅考

虑第一项的情况．我们有

$$\int_0^T b(u_m,\ u_m,\ Au_m)dt-\int_0^T b(u,\ u,\ Au)dt$$

$$=\int_0^T b(u_m-u,\ u_m,\ Au_m)ds$$

$$+\int_0^T b(u,\ u_m-u,\ Au_m)ds$$

$$+\int_0^T b(u,\ u,\ A(u_m-u))ds. \tag{29.67}$$

对于(29.67)右端的第一项，由(29.8)、(29.58)和赫尔德不等式，可得

$$\left|\int_0^T b(u_m-u,\ u_m,\ Au_m)ds\right|$$

$$\leqslant C_4\int_0^T |u_m-u|^{\frac{1}{2}}\|u_m\|\cdot|A(u_m-u)|^{\frac{1}{2}}\cdot|Au_m|ds$$

$$\leqslant C\int_0^T |u_m-u|^{\frac{1}{2}}|A(u_m-u)|^{\frac{1}{2}}\cdot|Au_m|ds$$

$$\leqslant C\left(\int_0^T |u_m-u|^2ds\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_0^T|A(u_m-u)|^2ds\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\cdot\left(\int_0^T|Au_m|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

由(29.17)和(29.59)，可知这些项当 $m\to\infty$ 时趋于0．对于第二项，利用(29.7)，有

$$\left|\int_0^T b(u,\ u_m-u,\ Au_m)ds\right|$$

$$\leqslant C_3\int_0^T |u|^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}}\|u_m-u\|^{\frac{1}{2}}|A(u_m-u)|^{\frac{1}{2}}|Au_m|ds$$

$$\leqslant C\int_0^T \|u_m-u\|^{\frac{1}{2}}|A(u_m-u)|^{\frac{1}{2}}\cdot|Au_m|ds$$

$$\leqslant C\left(\int_0^T\|u_m-u\|^2ds\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_0^T|A(u_m-u)|^2ds\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\cdot\left(\int_0^T|Au_m|^2ds\right).$$

由(29.17)和(29.59)，这些项当 $m\to+\infty$ 时也趋于0. 最后，(29.67)中的最后一项关于 u_m 是线性的. 由(29.62)易知，当 $m\to+\infty$ 时它趋于0，于是，我们证明了

$$\int_0^T b(u_m, u_m, Au_m)ds\to\int_0^T b(u, u, Au)ds. \qquad m\to+\infty$$

至于(29.66)的其余各项，证明是类似的. 最后我们得到

$$\begin{aligned}\lim_{m\to+\infty} Y_m = & -\frac{1}{2}\|u(T)\|^2+\frac{1}{2}\|u_0\|^2-\nu\int_0^T|Au|^2ds \\ & +\int_0^T\{(f, Au)-(Cu, Au)-b(u, u, Au)\}ds \\ = & 0.\end{aligned}$$

这就证明了(29.42)的强收敛性，从而证明了定理2.

现考虑问题(29.1)、(29.10)另一种非线性伽辽金方法.

设给定 $u_0\in V$，取算子 A 的特征向量作 V 的基. 设近似解 u_m 具有形式

$$u_m(t)=\sum_{j=1}^m g_{jm}(t)w_j,$$

$$u_m:\ \mathbb{R}^+\to\operatorname{span}\{w_1, \cdots, w_m\}=W_m.$$

再引入未知函数 z_m,

$$z_m(t)=\sum_{j=m+1}^{2m} h_{jm}(t)w_j,$$

$$z_m:\ \mathbb{R}^+\to\widetilde{w}_m=\operatorname{span}\{w_{m+1}, \cdots, w_{2m}\}.$$

要求 u_m、z_m 满足以下方程组：

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(u_m, v)+\nu((u_m, v))+(cu_m, v)+b(u_m, u_m, v) \\ &\quad +b(z_m, u_m, v)+b(u_m, z_m, v)+b(z_m, z_m, v) \\ &=(f, v), \qquad \forall v\in W_m \qquad (29.68)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\nu((z_m, \tilde{v}))+((z_m, \tilde{v}))+b(u_m, u_m, \tilde{v}) \\ &\quad +b(z_m, u_m, \tilde{v})+b(u_m, z_m, \tilde{v}) \\ &=(f, \tilde{v}), \qquad \forall \tilde{v}\in\widetilde{w}_m \qquad (29.69)\end{aligned}$$

$$u_m(0)=P_m u_0. \qquad (29.70)$$

(29.69)能改写为

$$\nu A z_m + (P_{2m} - P_m) c z_m + (P_{2m} - P_m)(B(z_m, u_m) + B(u_m, z_m))$$
$$= (P_{2m} - P_m)(f - B(u_m)), \tag{29.71}$$

以 $D(u_m)$ 表示(29.69)左端 z_m 的线性算子. 为了证明问题(29.68)～(29.70)的解 $\{u_m, z_m\}$ 在小范围的存在性, 我们必须证明 $D(u_m)$ 在 $\widetilde{w}_m$ 上是可逆的. 我们有

$$(D(u_m)\tilde{v}, \tilde{v}) = \nu\|\tilde{v}\|^2 + (c\tilde{v}, \tilde{v}) + b(\tilde{v}, u_m, \tilde{v})$$
$$\geqslant \alpha\|\tilde{v}\|^2 - c_1|\tilde{v}|\cdot\|\tilde{v}\|\cdot\|u_m\|$$
$$\geqslant \|\tilde{v}\|^2(\alpha - c_1\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}})\|u_m\|. \tag{29.72}$$

选取 m 充分大, 使

$$\alpha - c_1\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}\|u_0\| \geqslant \frac{\alpha}{2}, \tag{29.73}$$

则由常微分方程的存在定理, 方程组(29.68)～(29.70)具有解 $(u_m(t), z_m(t))$, $t\in[0, T_m]$. 在这个区间上, 方程组(29.68)、(29.69)等价于 u_m 的常微分方程组

$$\frac{du_m}{dt} + \nu A u_m + P_m(c u_m + B(u_m + z_m)) = P_m f, \tag{29.74}$$
$$z_m = D(u_m)^{-1}\{(P_{2m} - P_m)(f - B(u_m))\}.$$

条件(29.73)是满足的. 因 $m\to\infty$ 时, $\lambda_m\to\infty$, 我们在下面将证明(至少 m 充分大) $T_m = +\infty$, 即(29.74)的解定义在 $\mathbb{R}^+$ 上. 进一步, 我们证明当 $m\to+\infty$ 时, (29.74)的解趋于问题(29.1)的解.

我们有如下定理

定理 3 假设(29.4)～(29.9)成立, 设 u_0 给定在 V 中, 则有

(i) 存在常数 $k = k(u_0)$, 使得如果 m 满足

$$\alpha - C_1 k\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}} \geqslant \frac{\alpha}{2}, \tag{29.75}$$

则方程组(29.74)、(29.70)具有定义在 $\mathbb{R}^+$ 上的解 u_m;

(ii) (29.74)、(29.70)的解 u_m 当 $m\to+\infty$ 时收敛于(29.1)、(29.10)的解 u;

$u_m \to u$ 依 $L^2(0, T; D(A))$ 和 $L^p(0, T; V)$ 强收敛，

$\forall T>0, 1 \leqslant p < +\infty$, 且在 $L^\infty(R^+; V)$ 中弱*收敛.

(29.76)

证明 在(29.75)中的常数 k 将在后面确定. 现设(29.73)成立，因此(29.68)～(29.70)在某区间$(0, T_m)$上具有解 $\{u_m, z_m\}$. 我们得到 $\{u_m, z_m\}$ 在$(0, T_m)$上的某些先验估计，它和定理 1 和定理 2 类同.

（i）先验估计(I). 在(29.68)中 $v=u_m$, 在(29.69)中取$\tilde{v}=z_m$, 再相加相应的等式, 由(29.4)有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m|^2+\nu\|u_m\|^2+(cu_m, u_m)+\nu\|z_m\|^2+(Cz_m, z_m)$$
$$=(f, u_m+z_m). \tag{29.77}$$

因此, 类似于由(29.18)得到的(29.22)、(29.23), 有

$$u_m \text{ 依 } L^\infty(0, T; H) \text{一致对 } m \text{ 有界}, \tag{29.78}$$

$$u_m, z_m \text{ 依 } L^2(0, T; H) \text{一致对 } m \text{ 有界}, \forall T, T\in (0, T_m); \text{如果 } T_m<+\infty, T=T_m. \tag{29.79}$$

（ii）先验估计(II). 取 $v=Au_m$ 于(29.68), $\tilde{v}=Az_m$ 于(29.69), 再相加相应的等式, 我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|^2+\nu|Au_m|^2+\nu|Az_m|^2\\
&\quad=(f, A(u_m+z_m))-(cu_m, Au_m)-(cz_m, Az_m)\\
&\qquad-b(u_m, u_m, Au_m)-b(z_m, u_m, Au_m)\\
&\qquad-b(u_m, z_m, Au_m)-b(z_m, z_m, Au_m)\\
&\qquad-b(u_m, u_m, Az_m)-b(z_m, u_m, Az_m)\\
&\qquad-b(u_m, z_m, Az_m).
\end{aligned} \tag{29.80}$$

(29.80)右端的某些项在定理 2 的证明中已知有界. 由(29.7)、(29.25)、(29.26)有

$$\begin{aligned}
|b(z_m, u_m, Au_m)|&\leqslant C_3|z_m|^{\frac{1}{2}}\cdot\|z_m\|^{\frac{1}{2}}\|u_m\|^{\frac{1}{2}}|Au_m|^{3/2}\\
&\leqslant C_3\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}}\right)^{3/4}\cdot\|u_m\|^2\cdot|Az_m|
\end{aligned}$$

$$\leqslant C_3\|u_m\|^2\cdot|Az_m|$$

$$\leqslant\frac{\nu}{24}|Az_m|^2+\frac{C_{10}}{\nu}\|u_m\|^4, \tag{29.81}$$

$$|b(z_m,\ z_m,\ Au_m)|\leqslant C_3|z_m|^{\frac{1}{2}}\cdot\|z_m\|\cdot|Az_m|^{\frac{1}{2}}\cdot|Au_m|$$

$$\leqslant C_3\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}}\right)^{\frac{3}{4}}\|u_m\|^2\cdot|Az_m|$$

$$\leqslant C_3\|u_m\|^2\cdot|Az_m|$$

$$\leqslant\frac{\nu}{24}|Az_m|^2+\frac{C_{10}}{\nu}\|u_m\|^2\cdot\|z_m\|^2, \tag{29.82}$$

$$|b(z_m,\ u_m,\ Az_m)|\leqslant C_3|z_m|^{\frac{1}{2}}\cdot\|z_m\|^{\frac{1}{2}}\cdot\|u_m\|^{\frac{1}{2}}\cdot|Au_m|^{\frac{1}{2}}\cdot|Az_m|$$

$$\leqslant C_3\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\|u_m\|\cdot\|z_m\|\cdot|Az_m|$$

$$\leqslant\frac{\nu}{24}|Az_m|^2+\frac{C_{10}}{\nu}\|u_m\|^2\|z_m\|^2. \tag{29.83}$$

最后，(29.80)右端的最后一项可估计为

$$|b(u_m,\ z_m,\ Az_m)|\leqslant C_3|u_m|^{\frac{1}{2}}\cdot\|u_m\|^{\frac{1}{2}}\cdot\|z_m\|^{\frac{1}{2}}\cdot|Az_m|^{3/2}$$

$$\leqslant\frac{\nu}{24}|Az_m|^2+\frac{C_{11}}{\nu}|u_m|^2\cdot\|u_m\|^2\cdot\|z_m\|^2.$$

联合(29.44)～(29.49)、(29.81)～(29.83)，可得微分不等式

$$\frac{d}{dt}\|u_m\|^2+\nu|Au_m|^2+\nu|Az_m|$$

$$\leqslant\frac{12}{\nu}|f|^2+\frac{6C_2^2}{\nu}\|z_m\|^2+C_{12}\|u_m\|^2$$

$$\cdot(1+\|u_m\|^2+|u_m|^2\|u_m\|^2+\|z_m\|^2+|u_m|^2\|z_m\|^2), \tag{29.84}$$

其中 $C_{12}=C_{12}(\nu)$ 依赖于 ν. 由(29.84)可得

$$\frac{d}{dt}\|u_m\|^2\leqslant\frac{12}{\nu}|f|^2+\frac{6C_2^2}{\nu}\|z_m\|^2+C_{12}\|u_m\|^2$$

$$\cdot(1+\|u_m\|^2+|u_m|^2\cdot\|u_m\|^2+\|z_m\|^2+|u_m|\cdot\|z_m\|^2).$$

(29.85)

积分(29.85)从 0 到 T，并利用估计(29.78)、(29.79)，可得

$$u_m \text{ 依 } L^\infty(0, T; V) \text{ 对 } m \text{ 一致有界}, 0<T<T_m, \text{ 如果 } T_m<+\infty, T=T_m. \quad (29.86)$$

因此，如果 $T_m<+\infty$，(29.85)提供 $\|u_m(t)\|$ 的上界，$0\leqslant t\leqslant T_m$. 类似方法可得到 $T_m=+\infty$ 时 $\|u_m(t)\|$ 的上界. 事实上，从(29.77)有

$$\int_t^{t+1}\|u_m\|^2 ds+\int_t^{t+1}\|z_m\|^2 ds\leqslant C_{13}, \qquad \forall t\geqslant 0 \quad (29.87)$$

其中，常数 C_{13} 与 m 无关. 再由(29.87)、(29.78)，可知(29.85)满足引理 1(一致格朗沃尔引理)的条件. 由(29.55)给出 $\|u_m(t)\|$，$t\geqslant 1$ 与 m 无关的界. 因(29.85)给出了 $\|u_m(t)\|$，$0\leqslant t\leqslant 1$ 的界，我们有

$$u_m \text{ 依 } L^\infty(0, T_m; V) \text{ 对 } m \text{ 一致有界}. \quad (29.88)$$

(29.84)对 t 从 0 到 T 积分，可得

$$u_m, z_m \text{ 依 } L^2(0, T; D(A)) \text{ 对 } m \text{ 一致有界}, \quad (29.89)$$
$$0<T<T_m, \text{ 如 } T_m<+\infty, T=T_m.$$

(iii) 先验估计(III). 取 $\tilde{v}=Az_m$ 于(29.69)，可得

$$\begin{aligned}\nu|Az_m|^2 &= -(Cz_m, Az_m)-b(u_m, u_m, Az_m)\\ &\quad -b(z_m, u_m, Az_m)-b(u_m, z_m, Az_m)+(f, Az_m)\\ &\leqslant C_2\|z_m\||Az_m|+C_3|u_m|^{\frac{1}{2}}\|u_m\||Au_m|^{\frac{1}{2}}\cdot|Az_m|\\ &\quad +C_4|z_m|^{\frac{1}{2}}\cdot|Az_m|^{\frac{3}{2}}\cdot\|u_m\|\\ &\quad +C_3|u_m|^{\frac{1}{2}}\|u_m\|^{\frac{1}{2}}\|z_m\|^{\frac{1}{2}}|Az_m|^{3/2}+|f|\cdot|Az_m|.\end{aligned}$$

上式除以 $|Az_m|$，并利用(29.28)、(29.29)和(29.88)，得

$$\begin{aligned}\nu|Az_m| &\leqslant C_2\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}|Az_m|+C_3\lambda_m^{\frac{1}{4}}+C_4\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}|Az_m|\\ &\quad +C_3\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{4}}|Az_m|+|f|. \qquad t\in[0, T_m)\end{aligned}$$

因此

$$\{\nu-C_2\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}-C_4\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}-C_3\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{4}}\}|Az_m|\leqslant C_3\lambda_m^{\frac{1}{4}}+|f|.$$

当m充分大，有

$$\frac{\nu}{2}|Az_m|\leqslant C_3\lambda_m^{\frac{1}{4}}+|f|. \qquad (29.90)$$

因 $|Az_m|\geqslant\lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}}\|z_m\|$，由(29.90)得

$$z_m\to 0 \text{ 依 } L^\infty(0, T_m; V)\text{弱 * 收敛}, m\to+\infty. \qquad (29.91)$$

(iv) 取极限．首先验证(29.74)的解u_m，对充分大的m，定义在$\mathbb{R}^+$上．事实上，从(29.88)可知存在常数k(与m无关)，使得

$$\|u_m(t)|\leqslant k. \qquad 0\leqslant t<T_m \quad (29.92)$$

因此，如m满足

$$\alpha-c_1k\lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}\geqslant\frac{\alpha}{2},$$

则由(29.72)有

$$(D(u_m)\tilde{v}, \tilde{v})\geqslant\frac{\alpha}{2}\|\tilde{v}\|^2. \qquad t\in[0, T_m), \tilde{v}\in\tilde{w}_m$$

因此算子$D(u_m)$在$(0, T_m)$上一致强制．这就直接推出$T_m=+\infty$，证明了定理3的(i)．

现设(29.75)成立，其中k为(29.92)给定，则估计(29.89)、(29.91)当$T_m=+\infty$时成立．这些估计类似于(29.58)～(29.60)．因此我们能取极限$m\to+\infty$．则依(29.17)、(29.42)意义下u_m收敛于问题(29.1)、(29.10)的解u，这就证明了(29.76)．定理3证毕．

现考虑对某些非线性演化方程逼近的一些数值计算格式．空间离散的有谱方法、拟谱方法、有限元法和有限差分法．时间离散的有两种格式：部分或全显式．

设V_h表示有限维矢量空间，具有两种数量积及其模：$((\cdot,\cdot))_h$，$\|\cdot\|_h$；$(\cdot,\cdot)_h$，$|\cdot|_h$．V_h为典型的索伯列夫空间的逼近，$\|\cdot\|_h$为离散的索伯列夫模，$|\cdot|_h$为离散的L^2模，$V_h\in\{V_l\}$，$l\in\mathscr{H}$，当h趋于0时，$\{V_l\}$逼近无限维空间V．设C_i为正绝对常数，与h无关，$S_i=S_i(h)$是依赖于h的常数，通常当$h\to0$时，它趋于0．设

$$|u_h|_h \leqslant C_1\|u_h\|_h,\ S_1(h)\|u_h\|_h \leqslant |u_h|_h. \qquad \forall u_h \in V_h \tag{29.93}$$

双线性连续形式 $a_h(\cdot,\ \cdot)$ 在 V_h 上满足：

$$|a_h(u_h,\ v_h)| \leqslant C_2\|u_h\|_h\|v_h\|_h, \quad \forall u_h, v_h \in V_h \tag{29.94}$$

三线性连续形式 $b_h(\cdot,\ \cdot,\ \cdot)$ 在 V_h 上满足

$$b_h(u_h,\ v_h,\ v_h) = 0, \qquad \forall u_h, v_h \in V_h \tag{29.95}$$

$$|b_h(u_h,\ v_h,\ w_h)| \leqslant C_3|u_h|_h^{\frac{1}{2}}\|u_h\|_h^{\frac{1}{2}}\|v_h\|_h|w_h|_h^{\frac{1}{2}}\|w_h\|_h^{\frac{1}{2}}, \tag{29.96}$$

双线性连续形式 $d_h(\cdot,\ \cdot)$ 在 V_h 上满足

$$|d_h(u_h,\ v_h)| \leqslant C_4\|u_h\|_h\cdot|v_h|_h, \quad \forall u_h, v_h \in V_h \tag{29.97}$$

$$a_h(u_h,\ u_h) + d_h(u_h,\ u_h) \geqslant C_5\|u_h\|^2, \quad \forall u_h \in V_h \tag{29.98}$$

现考虑如下的初值问题：

寻求函数 $u_h: \mathbb{R}^+ \to V_h$，使得

$$\frac{d}{dt}(u_h,\ v_h)_h + a_h(u_h,\ v_h) + b_h(u_h,\ u_h,\ v_h) + d_h(u_h,\ v_h) = (f_h,\ v_h), \qquad \forall v_h \in V_h \tag{29.99}$$

$$u_h(0) = u_{0h}, \tag{29.100}$$

其中 u_{0h} 在 V_h 中给定，$f_h \in L^\infty(R^+; V_h)$. 因 V_h 为有限维的，由(29.94)～(29.98)可知初值问题(29.99)、(29.100)具有唯一解 u_h，

$$u_h \in L^\infty(R^+; V_h), \tag{29.101}$$

且 u_h 是对 h 一致有界的.

许多具有物理意义的方程可化为(29.99)形式. 条件(29.94)～(29.98)是满足的. 设

$$V_h = V_{h_2} \oplus W_h, \tag{29.102}$$

其中 $V_{h_2} \subset V_h = V_{h_1}$，$V_{h_2}$ 的元素表为 y_h，$\tilde{y}_h$，…，而 W_h 的元素表为 z_h，$\hat{z}_h$，…. 对于任何 $u_h \in V_h$，可唯一表为

$$u_h = y_h + z_h. \qquad y_h \in V_{h_2},\ z_h \in W_h \tag{29.103}$$

现对分解式(29.102)作如下假设：

$$|((y_h, z_h))| \leqslant (1-\delta)\|y_h\|_h \cdot \|z_h\|_h, \qquad \forall y_h \in V_{h_2}, \ \forall z_h \in W_h \tag{29.104}$$

其中 $\delta \in (0, 1)$，与 h 无关；且设

$$|z_h|_h \leqslant S_2(h)\|z_h\|_h, \qquad \forall z_h \in W_h \tag{29.105}$$

其中 $S_2(h) \to 0$，当 $h \to 0$.

现给出形式(29.102)分解的三种重要情况：

（i）谱离散：V_h 为希尔伯特空间 V 的子空间，内积为 $((\cdot, \cdot))$，模为 $\|\cdot\|$，形式 $a_h(u_h, v_h)$ 为 V 上的双线性连续对称强制形式在 V_h 上的限制，V 连续嵌入和稠在另一个希尔伯特空间 H，其内积为 $(\cdot, \cdot)$，其模为 $|\cdot|$，则

$$\|u_h\|_h = \|u_h\|, \qquad |u_h|_h = |u_h|. \qquad \forall u_h \in V_h$$

与 a、V、H 相连的无界自共轭算子 A 具有在 H 和 V 中的正交基 w_j，$j \in N$，$D(A) \subset V$.

$$Aw_j = \lambda_j w_j, \ 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots, \ \lambda_j \to \infty, \ j \to \infty, \tag{29.106}$$

给定 $m = m_1 \in N$，$h = \dfrac{1}{m_1}$，$V_h = \operatorname{span}\{w_1, \cdots, w_{m_1}\}$，(29.100)可看作某无限维问题在 V 中的伽辽金近似.

考虑分解(29.102)．设另一个整数 $m_2 \in \mathbb{N}$，$m_2 < m_1$．记

$$V_{h_2} = \operatorname{span}\{w_1, \cdots, w_{m_2}\}, \quad W_h = \operatorname{span}\{w_{m_2+1}, \cdots, w_{m_1}\},$$

此时 V_{h_2} 和 W_h 在 V_h 中正交（数量积 $((\cdot, \cdot))_h = ((\cdot, \cdot))$），(29.104)满足，$\delta = 1$．关于(29.105)，对一切

$$z_h \in W_h, \quad z_h = \sum_{j=m_2+1}^{m_1} \xi_j w_j,$$

有

$$|z_h|_h^2 = \left\| \sum_{j=m_2+1}^{m_1} \xi_j w_j \right\|^2 = \sum_{j=m_2+1}^{m_1} |\xi_j|^2 \lambda_j$$

$$\geqslant \lambda_{m_2+1} \sum_{j=m_2+1}^{m_1} |\xi_j|^2 = \lambda_{m_2+1} |z_h|_h^2.$$

因而

$$S_2 = (\lambda_{m_2+1})^{-\frac{1}{2}}. \tag{29.107}$$

当为连续问题时，a 和 V 相连于椭圆型边值问题，具有空间边界条件，(29.99)为连续问题的谱或拟谱近似.

(ii) 有限元. 我们限于最简单情况：一维具分片线性元. 空间 V_h 为 $V=H_0^1(\Omega)$ 的子空间，$\Omega=(0, L)$，$L>0$. 引入内积

$$((u_h, v_h))_h=((u_h, v_h))=\int_0^L \frac{du_h}{dx}\frac{dv_h}{dx}dx,$$

数量积 $(\cdot, \cdot)_h$ 在 $L^2(0, L)$ 上，

$$(u_h, v_h)_h=(u_h, v_h)=\int_0^L u_h v_h dx.$$

记 $h_1=h=\frac{1}{2N}$，$h_2=\frac{1}{N}$，$N\in\mathbb{N}$，则 V_h 为在 $(0, L)$ 上的实连续函数空间，它在 0 和 L 上为 0，在区间 $(jh, (j+1)h]$ 上是线性的 $(j=0, 1, \cdots, 2N-1)$. 空间 $V_h=V_{2h}$ 依相同方式定义，但 V_{2h} 在区间 $[2jh, 2(j+1)h]$ 上线性，$j=0, 1, \cdots, N-1$.

V_h 的节点基由 V_h 的函数 $w_{j,h}$ 所组成.

$w_{j,h}(jh)=1$; $w_{j,h}(ih)=0$. $\qquad i, j=1, \cdots, 2N-1, i\neq j$

类似地，V_{2h} 的节点基由 V_{2h} 的函数 $w_{j,2h}$ 组成，

$$w_{j,2h}(2jh)=1;$$

$$w_{2j,h}(2ih)=0, \qquad i, j=1, \cdots, N-1, i\neq j$$

V_h 的基由 V_{2h} 的基和 W_h 的基所组成：$W_{j,h}$，$j=2i+1$，$i=0, 1, \cdots, N-1$. 即 $u_h\in V_h$ 可展开为

$$u_h=\sum_{j=1}^{2N-1} u_h(jh) w_{j,h}, \tag{29.108}$$

可分解为

$$u_h=\sum_{j=1}^{N-1} u_h(2jh) w_{j,2h}+\sum_{i=0}^{N-1}\bar{u}_h((2i+1)h) w_{2i+1,h}, \tag{29.109}$$

其中 $\bar{u}_h((2i+1)h)$ 为 u_h 的增值：

$$\bar{u}_h((2i+1)h)=u_h((2i+1)h)-\frac{1}{2}(u_h(2ih)+u_h((2i+2)h)). \tag{29.110}$$

注意到(29.109)的第一部分和对应于 $y_h \in V_{h2} \subset V_h$，而第二部分和对应于分量 $z_h \in W_h$，如果 $u_h(jh) = u(jh)$，$j = 0, 1, \cdots, 2N$，则

$$\tilde{u}_h((2i+1)h) = \frac{h^2}{2} u''((2i+1)h) + o(h^3),$$

y_h 和 u_h 同阶，而 z_h 具有因子 h^2.

容易验证：对于任何函数 $y_h \in V_{h2}$，在 V 上正交于任何函数 $z_h \in W_h$，因此(29.104)成立，$\delta = 1$. (29.105)易被满足，我们有

$$S_2(h) = h/\sqrt{3}. \tag{29.111}$$

(29.93)易用普通方法验证．例如，对于 $S_1(h)$，记 $\xi_i = u_h(ih)$，

$$\int_0^L \left(\frac{du_h}{dx}\right)^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2N-1} (\xi_{i+1} - \xi_i)^2.$$

类似地，

$$\int_0^L (u_h)^2 dx = \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{2N-1} (\xi_i^2 + \xi_{i+1}^2 + \xi_i \xi_{i+1}).$$

因此，$S_i(h) = \dfrac{h}{2\sqrt{3}}$.

(iii) 有限差分法．设 $V = H_0^1(0, L)$；$h = L/2N$，$N \in \mathbb{N}$．V_h 是由在 $[jh, (j+vh))$ 上是常数的阶梯函数空间($j = 0, 1, \cdots, 2N-1$)，它在 $[0, h]$ 和 $[L-h, L]$ 上为 0，$V_h = \mathrm{span}\{w_{j,h}\}$，

$$w_{j,h} = \begin{cases} 1, & [jh, (j+1)h); \\ 0, & \text{其他处}, \ j = 1, 2, \cdots, 2N-2. \end{cases}$$

$$u_h = \sum_{j=1}^{2N-2} u_h(jh) W_{j,h}, \ \forall u_h \in V_h.$$

$\{W_{j,h}\}$ 为 V_h 的自然基，定义数量积

$$((u_h, v_h))_h = \int_0^{L-h} \nabla_h u_h \nabla_h v_h dx,$$

$$(u_h, v_h)_h = \int_0^L u_h v_h dx,$$

其中 ∇_h 为向前差分算子

$$(\nabla_h \varphi)(x) = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}.$$

令 $h_2=2h$，类似定义 $V_{h_2}=V_{2h}$，它的基由 $W_{j,2h}$ 所组成($j=1,\cdots,N-2$)，$V_{2h}\subset V_h$. 在分解(29.102)中，定义 $W_h=\operatorname{span}\{W_{2i+1,h}\}$，$i=0,1,\cdots,N-2$. 任何函数 $u_h\in V_h$ 可写为

$$u_h=y_h+z_h, \qquad y_h\in V_{2h}$$

$$y_h=\sum_{j=1}^{N-2}u_h(2jh)W_{j,2h}, \tag{29.112}$$

$$z_h=\sum_{i=0}^{N-2}z_h((2i+1)h)W_{2i+1,h}+z_h((2N-2)h)W_{2N-2,h},$$

当 $i=0,1,\cdots,N-2$ 时，

$$z_h((2i+1)h)=\bar{u}_h((2i+1)h)=u_h((2i+1)h)-u_h(2ih), \tag{29.113}$$

$$z_h((2N-2)h)=u_h((2N-2)h). \tag{29.114}$$

显然，如 u_h 为光滑函数 $u\in H_0^1(0,L)$ 在 V_h 上的限制，则 y_h 和 u_h 同阶，z_h 具有 h 的因子.

由如下引理可验证(29.104)和(29.105).

引理 2 成立如下的柯西-施瓦兹不等式

$$|((y_h,z_h))_h|\leqslant\sqrt{\frac{2}{3}}\|y_h\|_h\|z_h\|_h, \qquad \forall y\in V_{2h},\ \forall z_h\in W_h \tag{29.115}$$

证明 我们必须证明

$$\int_0^{L-h}\nabla_h y_h\nabla_h z_h dx\leqslant\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\int_0^{L-h}|\nabla_h y_h|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_0^{L-h}|\nabla_h z_h|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{29.116}$$

充分证明(29.116)置换区间$(0,L)$为每个粗网格区间$(2jh,2(j+1)h)$上成立即可，$j=1,2,\cdots,N-3$. 取

$$y_h=\begin{cases}m_1, & x\in[2jh,2(j+1)h);\\ m_2, & x\in[2(j+1)h,(2j+3)h),\end{cases}$$

$$z_h=\begin{cases}0, & x\in[2jh,\ (2j+1)h);\\ P_1, & x\in[(2j+1)h,\ 2(j+1)h);\\ 0, & x\in[2(j+1)h,\ (2j+3)h);\\ P_2, & x\in[(2j+3)h,\ 2(j+2)h),\end{cases}$$

如图 29-1 所示.

图 29-1

在区间 $[2jh,\ (2j+1)h)$,

$$\nabla_h y_h=0,\qquad \nabla_h z_h=\frac{P_1}{h}.$$

在 $[(2j+1)h,\ 2(j+1)h)$,

$$\nabla_h y_h=\frac{m_2-m_1}{h},\qquad \nabla_h z_h=-\frac{P_1}{h}.$$

$$\begin{aligned}\int_{2jh}^{2(j+1)h}\nabla_h y_h\nabla_h z_h dx&=-\frac{1}{h}(m_2-m_1)P_1\\ &\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_{2jh}^{2(j+1)h}|\nabla_h y_h|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\quad\cdot\left(\int_{2jh}^{2(j+1)h}|\nabla_h z_h|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &=\frac{1}{h}|m_2-m_1|\cdot|P_1|.\end{aligned}\tag{29.117}$$

现考虑端点区间 $j=0$, $j=N-2$, $N-1$. 仅不同的是, 对 $j=0$, $m_1=0$. 因此(29.117)仍成立. 再考虑区间 $[L-4h,\ L-2h)$ 和 $(L-2h,\ L-h)$. 在 $[L-2h,\ L-h]$ 上 z_h 不为 0 (例如 $z_h=P_2$), 但在 $[L-h,\ L)$ 上, $z_h=0$. 因此

$$\int_{L-4h}^{L-h} \nabla_h y_h \nabla_h z_h dx = -\frac{1}{h} m_1(P_2 - P_1)$$

$$\leqslant \frac{1}{h}\sqrt{\frac{2}{3}}\, |m_1|((P_2-P_1)^2+P_1^2+P_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\int_{L-4h}^{L-h} |\nabla_h y_h|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot \left(\int_{L-4h}^{L-h} |\nabla_h z_h|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

因$\frac{1}{\sqrt{2}}<\sqrt{\frac{2}{3}}$，故得到(29.115).

引理3 对于W_h中的函数，成立如下强的离散 Poincalé 不等式

$$|z_h|_h \leqslant S_2(h)\|z_h\|_h,\quad \forall z_h \in W_h,\quad S_2(h)=h. \tag{29.118}$$

证明 如同引理2，充分证明类似的不等式在区间$[2jh, 2(j+1)h)$上成立，$j=0, 1, \cdots, N-1$，即

$$\int_{2jh}^{2(j+1)h} z_h^2 dx \leqslant S_2^2(h)\int_{2jh}^{2(j+1)h} |\nabla_h z_h|^2 dx. \tag{29.119}$$

如同引理2，可知(29.119)右端积分等于$2P_1^2/h$，$j=0, 1, \cdots, N-3$；而积分的左端等于$P_1^2 h$．因此，(29.119)中$S_2(h)=h/\sqrt{2}$，在区间$[L-4h, L)$上z_h^2的积分等于$h(P_1^2+P_2^2)$，而$|\nabla_h z_h|^2$的积分等于$\frac{1}{h}((P_1-P_2)^2+P_1^2+P_2^2)$，我们得到不等式(29.119)，$S_2(h)=h$，因而(29.118)成立.

(29.93)的证明是标准的．现证明(29.93)的第二不等式．令$\xi_j=u_h(jh)$，$u_h=\sum_{j=1}^{2N-2}\xi_j W_{j,h}$，且

$$|u_h|_h^2 = h\sum_{j=1}^{2N-2}\xi_j^2,$$

$$\|u_h\|_h^2 = \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{2N-2}(\xi_{j+1}-\xi_j)^2 \leqslant \frac{2}{h}\sum_{j=1}^{2N-2}(\xi_{j+1}^2+\xi_j^2)$$

$$= \frac{4}{h}\sum_{j=1}^{2N-2}\xi_j^2, \qquad (因\ \xi_0=\xi_{2N-1}=0)$$

$$=\frac{4}{h^2}|u_h|_h^2.$$

因此

$$S_1(h)=h/2. \tag{29.120}$$

引理 4 成立如下等式

$$|y_h|_h=|y_h|_{2h},\quad \|y_h\|_h^2=2\|y_h\|_{2h}^2. \qquad \forall y_h\in V_{2h}=V_{h_1} \tag{29.121}$$

证明 (29.121)的第一个等式是显然的，因 $|\cdot|_h$ 和 $|\cdot|_{2h}$ 为 L^2 模. 为证(29.121)的第二个等式，同引理 2 一样，因 $\nabla_{2h}y_h=(m_2-m_1)/2h$, $[2jh,\ 2(j+1)h)$, 而

$$\nabla_h y_h=\begin{cases}0, & [2jh,\ (2j+1)h);\\ \dfrac{m_2-m_1}{h}, & [(2j+1)h,\ 2(j+1)h),\end{cases}$$

因此

$$\int_{2jh}^{2(j+1)h}|\nabla_{2h}y_h|^2dx=\frac{(m_2-m_1)^2}{2h}=\frac{1}{2}\int_{2jh}^{2(j+1)h}|\nabla_h y_h|^2dx,$$

(29.121)由 $j=0,\ 1,\ \cdots,\ N-2$ 求和而得.

附注 空间 V_{2h} 起着如同 V_h 的作用，因此，类似于假设(29.93)—(29.98)是正确的. 特别，(29.93)中的第二个假设为

$$S_1(2h)\|y_h\|_{2h}\leqslant|y_h|_{2h}. \qquad \forall y_h\in V_{h_1}=V_{2h} \tag{29.122}$$

和(29.120)、(29.121)相联系，不等式(29.122)变为

$$\bar{S}_1(h)\|y_h\|_h\leqslant|y_h|_h. \qquad \forall y_{h_1}\in V_h=V_{2h}$$

$$\bar{S}(h)=S_1(2h)/2. \tag{29.123}$$

对于其他形式的离散(谱和有限元)，$\|y_h\|_{h_1}=\|y_h\|_h$, $|y_h|_{h_1}=|y_h|_h$, $\forall y_h\in V_h$. 因此(29.123)仍成立，但 $\bar{S}_1(h)=S(h_2)$.

现考虑时间的离散.

格式 I 初值 u_{0h} 在(29.101)中分解为

$$u_{0h}=y_h^0+z_h^0. \qquad y_h^0\in V_{h_1},\quad z_h^0\in W_h$$

我们确定 $y_h^n\in V_{h2}$, $z_h^n\in W_h$ 为循环序列如下：

设 y_h^n、z_h^n 为已知. 定义 $y_h^{n+1}\in V_{2h}$ 和 $z_h^{n+1}\in W_h$ 如下:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{k}(y_h^{n+1}-y_h^n,\ \hat{y}_h)_h+a_h(y_h^{n+1}+z_h^{n+1},\hat{y}_h)+d_h(y_h^{n+1}+z_h^{n+1},\hat{y}_h)\\
&\qquad+b_h(y_h^n,\ y_h^n,\ \hat{y}_h)+b_h(y_h^n,\ z_h^n,\ \hat{y}_h)+b_h(z_h^n,\ y_h^n,\ \hat{y}_h)\\
&\qquad=(f_h^n,\ y_h^n)_h; \qquad\qquad \forall\,\hat{y}_h\in V_h, \qquad (29.124)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{k}(z_h^{n+1}-z_h^n,\ \hat{z}_h)_h+a_h(y_h^{n+1}+z_h^n,\ \hat{z}_h)\\
&\qquad+d_h(y_h^{n+1}+z_h^{n+1},\ \hat{z}_h)+b_h(y_h^n,\ y_h^n,\ \hat{z}_h)\\
&\qquad=(f_h^n,\ \hat{z}_h)_h. \qquad\qquad \forall\,\hat{z}_h\in W_h \qquad (29.125)
\end{aligned}
$$

这里 $k=\Delta t$ 为时间步长, f_h^n 表示 f_h 的平均:

$$
f_h^n=\frac{1}{k}\int_{nk}^{(n+1)k}f(t)dt, \qquad (29.126)
$$

如果 f 是光滑的, 则可取 $f_h^n=f_h(nk)$, 方程(29.124)—(29.125)是 y_h^{n+1}、z_h^{n+1} 的线性方程组. 由于(29.98), 从 Lax-Milgram 定理可知, y_h^{n+1}、z_h^{n+1} 唯一存在.

格式 I′ 稍不同于格式 I. 在(29.124)中 b 项处理为对 z 是隐的, (29.124)置换为

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{k}(y_h^{n+1}-y_h^n,\ \hat{y}_h)_h+a_h(y_h^{n+1}+z_h^{n+1},\hat{y}_h)+d_h(y_h^{n+1}+z_h^{n+1},\hat{y}_h)\\
&\qquad+b_h(y_h^n,\ y_h^n,\ \hat{y}_h)+b_h(y_h^n,\ z_h^{n+1},\ \hat{y}_h)+b_h(z_h^{n+1},\ y_h^n,\ \hat{y}_h)\\
&\qquad=(f_h^n,\ \hat{y}_h)_h. \qquad\qquad \forall\,\hat{y}_h\in V_h, \qquad (29.127)
\end{aligned}
$$

格式 II 设 y_h^n 和 z_h^n 已知, 定义 y_h^{n+1} 和 z_h^{n+1} 如下:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{k}(y_h^{n+1}-y_h^n,\ \hat{y}_h)_h+a_h(y_h^n+z_h^{n+1},\ \hat{y}_h)\\
&\qquad+d_h(y_h^n+z_h^{n+1},\ \hat{y}_h)+b_h(y_h^n,\ y_h^n,\ \hat{y}_h)\\
&\qquad+b_h(y_h^n,\ z_h^{n+1},\ \hat{y}_h)+b_h(z_h^{n+1},\ y_h^n,\ \hat{y}_h)\\
&\qquad=(f_h^n,\ \hat{y}_h)_h; \qquad\qquad \forall\,\hat{y}_n\in V_h, \qquad (29.128)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{k}(z_h^{n+1}-z_h^n,\ \hat{z}_h)_h+a_h(y_h^n+z_h^{n+1},\ \hat{z}_h)\\
&\qquad+d_h(y_h^n+z_h^{n+1},\ \hat{z}_h)+b_h(y_h^n,\ y_h^n,\ \hat{z}_h)\\
&\qquad=(f_h^n,\ \hat{z}_h)_h. \qquad\qquad \forall\,\hat{z}_h\in W_h \qquad (29.129)
\end{aligned}
$$

事实上，先由(29.129)解出 z_h^{n+1}，再由(29.127)解 y_h^{n+1}.

格式 III 这格式不同于格式 II，它忽略 $z_h^{n+1}-z_h^n$. 对于 z_h^{n+1} 的计算，由以下求解确定

$$a_h(y_h^n+z_h^{n+1},\ \hat{z}_h)+d_h(y_h^n+z_h^{n+1},\ \hat{z}_h)+b_h(y_h^n,\ y_h^n,\ \hat{z}_h)$$
$$=(f_h^n,\ \hat{z}_h).\qquad \forall\,\hat{z}_h\in W_h\quad(29.130)$$

z_h^{n+1} 在(29.130)中的可解性由(29.×)和 Lax-Milgram 定理得到.

现举两个例子

[例 1](伯格斯方程) 设 $\Omega=(0,L)$, $L>0$. 令 $V=H_0^1(0,L)$, $H=L^2(0,L)$. 对 $v>0$, f 给定，方程为

$$u_t-vu_{xx}+uu_x=f,\qquad \Omega\times\mathbb{R}^+$$
$$u(0,\ t)=u(L,\ t)=0,\quad u(x,\ 0)=u_0(x),$$

这个方程的变分形式为寻求 u: $\mathbb{R}^+\to H_0^1(\Omega)=V$，使

$$\frac{d}{dt}(u,\ v)+v((u,\ v))+b(u,\ u,\ v)=(f,\ v),\qquad \forall\,v\in V\qquad(29.131)$$

其中

$$(\varphi,\ \psi)=\int_0^L\varphi\psi\,dx,\quad ((\varphi,\ \psi))=\int_0^L\frac{d\varphi}{dx}\,\frac{d\psi}{dx}\,dx,\qquad \forall\varphi,\ \psi$$

b 为反对称非线性项，

$$b(\varphi,\ \psi,\ \theta)=\frac{1}{3}\int_0^L\varphi(\psi_x\theta-\psi\theta_x)dx.$$

运用谱方法、有限元法、有限差分法离散可得到方程(29.99)，$d=0$. 设(29.94)～(29.98)是满足的，$C_2=C_5=v$, $C_4=0$, C_3 为适当常数.

[例 2](纳维-斯托克斯方程) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}-v\Delta u+(u,\ \nabla)u+\frac{1}{2}(\mathrm{div}\,u)u=f,\qquad x\in\Omega,\ t\geqslant0$$
$$u=0,\ \partial\Omega,\qquad u(x,\ 0)=u_0(x).$$

化为(29.130)形式 u: $\mathbb{R}^+\to V=H_0^1(\Omega)$.

$$(\varphi, \psi)=\int_\Omega \varphi\psi\, dx, \quad ((\varphi, \psi))=\sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\frac{\partial\psi_i}{\partial x_j}\, dx,$$

$$b(\varphi, \psi, \theta)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega \varphi_i\left(\frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}\theta_j-\psi_j\frac{\partial\theta_j}{\partial x_i}\right)dx.$$

用谱方法、二维有限元、二维有限差分法进行离散. 可得方程(29.99), $d=0$, 假设(29.94)～(29.98)满足, $C_2=C_3=\nu$, $C_4=0$, C_8 为适当常数.

§30 惯 性 集

设 X 为希尔伯特空间 H 的紧连通子集, S 为从 X 到它自身的 Lip 连续映射. 设 S 在 X 上的 Lip 常数为

$$\mathrm{Lip}_X(S)=L. \tag{30.1}$$

如 S 限制在 X 上, 则它具有一个整体吸引子 $\mathscr{A}$. 它是紧的, 连通的, 可由下式给定

$$\mathscr{A}=\bigcap_{n=1}^{\infty} S^n X. \tag{30.2}$$

众所周知, $\mathscr{A}$ 吸引一切轨线, 当 $h\to\infty$ 时, 对称豪斯多夫距离 $\rho(S^n X, \mathscr{A})\to 0$. 但无论如何, 吸引子的收敛率不是指数控制的. 举一个简单例子: 设 $H=\mathbb{R}$, 定义 S: $[0, 1]\to[0, 1]$,

$$Sx=\frac{1}{1+x},$$

则 $\mathscr{A}=\{0\}$. $\mathscr{A}$ 的收敛率为多项式. 为了弥补这个不足, 我们引进惯性集这一概念.

定义 1 一个紧集 M 称之为 (S, X) 的**惯性集**, 如果 $\mathscr{A}\subseteq M\subseteq X$, 且

(i) $SM\subseteq M$;

(ii) M 具有有限分形维数 d_M;

(iii) 存在正常数 C_0 和 C_1, 使

$$h(S^n X, M)\leqslant C_0\exp(-C_1 n), \qquad \forall n\geqslant 1$$

这里用的距离是两个集的标准的非对称拟距离

$$h(A,\ B)=\max_{a\in A}\min_{b\in B}|a-b|_H,$$

其中 A、B 为二个紧集. 无论如何, 标准豪斯多夫度量定义为

$$\rho(A,\ B)=\max\{h(A,\ B),\ h(B,\ A)\}.$$

现考虑一阶耗散演化方程的惯性集. 设方程的形式为

$$\frac{du}{dt}+Au+R(u)=0, \tag{30.3}$$

$$u(0)=u_0. \tag{30.4}$$

在适当的关于算子 A、$R(u)$ 和初值 u_0 的假设下, 不仅保证解的存在、唯一, 而且由问题的耗散性, 还能得到存在紧的吸收集 B. 为了得到惯性集, 映射 S 的挤压性是很重要的.

定义 2 S 在 X 中具有挤压性质, 如果对一切 $\delta\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$, 存在秩为 $N_0(\delta)$ 的正交投影, 使得对任何 u 和 v, 有

$$|Su-Sv|_H\leqslant\delta|u-v|_H, \tag{30.5}$$

或

$$|(I-P)(Su-Sv)|_H\leqslant|P(Su-Sv)|_H. \tag{30.6}$$

挤压性质的另一种表述为: 如对 u、$v\in X$,

$$|Su-Sv|_H>\sqrt{2}|P_{N0}(Su-Sv)|_H, \tag{30.7}$$

则

$$|Su-Sv|_H<\delta|u-v|_H. \tag{30.8}$$

定义 3 令 $E_{k+1;j_1,\cdots,j_k}$ 表示在紧集 $S(\overline{B}_{\theta^kR}(a_{j_1,\cdots,j_k})\cap S^kX)$ 上满足锥性质

$$|u-v|_H\leqslant\sqrt{2}|P_{N0}(u-v)|_H \tag{30.9}$$

的最大集, 其中 u、$v\in S(\overline{B}_{\theta^kR}(a_{j_1,\cdots,j_k})\cap S^kX)$, $a_{j_1,\cdots,j_k}\subset E_{k;j_1,\cdots,j_{k-1}}$, $(j_1,\ \cdots,\ j_k)\in(1,\ 2,\ \cdots,\ k_0)$, $k_0\leqslant\left(\frac{2L}{\delta}+1\right)^{N_0}$, $4\delta<\theta<1$, $\overline{B}_r(a)$ 表示在 H 中的闭球, 中心 $a\in X$, 具有半径 r. 令

$$E^{(k+1)} = \bigcup_{\substack{j_1=1 \\ \vdots \\ j_k=1}}^{k_0} E_{k+1; j_1, \cdots, j_k} \subset S^{k+1} X. \tag{30.10}$$

定理 1 设 $M = \mathscr{A} \cup \left(\bigcup_{j=0}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} (E^{(k)}) \right)$，则 M 为 S 的一个惯性集，且有

$$d_F(M) \leqslant \max\{\alpha(X), N_0\}, \tag{30.11}$$

其中 $\alpha(X) = \log k_0 / \log(H\theta)$，$\mathscr{A}$ 为吸引子.

现给定解算子 $S(t)$ 映射 u_0 为 $u(t)$ 和紧吸收集 B. 我们得到映射 $S(t)$（其中 $t = t_*$），使 B 映成自身. 记这个映射为

$$S_* = S(t_*). \tag{30.12}$$

选取 t_* 充分小，使 S_* 具有挤压性质，其中 $\delta < \frac{1}{8}$，$N_0 = N_0(\delta)$. 由定理 1，存在惯性集 M_*，定义

$$M = \bigcup_{0 \leqslant t \leqslant t_*} S(t) M_*. \tag{30.13}$$

如 $[0, T] \times M_* \to M$ 的映射 F：

$$F(t, x) = S(t)x \tag{30.14}$$

为 Lip 的，则能证明 M 仍为一紧集，具有有限分形维数. 进一步，M 对 $(\{S(t)\}_{t \geqslant 0}, B)$ 是指数吸引的. 为了更详细说明这一事实，再一次给出惯性集的定义.

定义 4 对于紧集 M，如果 $\mathscr{A} \subseteq M \subseteq X$，且

(i) $S(t)M \subseteq M$, $\forall t \geqslant 0$;

(ii) M 具有有限分形维数 d_M;

(iii) 存在正常数 a_0 和 a_1，使得对一切 $t \geqslant 0$,

$$\operatorname{dist}(S(t)X, M) \leqslant a_0 \exp(-a_1 t),$$

则紧集 M 称为 $(\{S(t)\}_{t \geqslant 0}, X)$ 的一个惯性集.

对于初值问题(30.3)、(30.4)，设 H 为可分的希尔伯特空间，且 A 是正的、自共轭线性算子，$D(A) \subset H$，具有紧的逆 A^{-1}. 进一步，设初值问题(30.3)、(30.4)可用非线性算子的半群 $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ 的求解得到. 设

$$S(t):\ H\to D(A)\text{是连续的.}\qquad t>0$$

设存在紧的不变吸收集 B,

$$B=\{u\in H:\ |u|_H\leqslant\rho_0,\ \ |u|_{D(A^{\frac{1}{2}})}\leqslant\rho_1\}.$$

A^{-1} 是紧的, 记

$$V=D(A^{\frac{1}{2}}).$$

显然, V 紧嵌入于 H. 为简单计, 令

$$\|u\|=\|u\|_V=|A^{\frac{1}{2}}u|_H,\qquad |u|=|u|_H.$$

对于方程(30.3), 作如下假设:

$$R:\ D(A)\to H\ \text{是连续的.}$$

存在紧的不变集 $X\subset B$, 和实数 $\beta\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$, 使得对任何 u、$v\in X$, 有

$$|R(u)-R(v)|\leqslant C_0|A^{\beta}(u-v)|,\tag{30.15}$$

其中 C_0 依赖于 X.

命题 1 在关于方程(30.3)的上述假定下, 存在时间 t_*, 使得离散算子 $S_*=S(t_*)$ 满足挤压性质, 其中 $\delta<\dfrac{1}{8}$.

证明 首先, 我们引入投影. 因 A 是自共轭、正算子, 且具有紧逆 A^{-1}, 则存在在 H 中对应于正特征值 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的特征向量的完全集 $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$, 即有

$$Aw_n=\lambda w_n,\qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

且特征值满足

$$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n\to+\infty.$$

记

$$H_n=\operatorname{span}\{w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_n\},$$

$$P_n\ \text{为}\ H\ \text{在}\ H_n\ \text{上的正交投影.}$$

因此, $Q_n=I-P_n$ 是 H 在 H_n 的补集上的正交投影.

设 t_* 已给定, 现证明挤压性质, 即对任何 $\delta>0$, 存在 $N_0=N_0(\delta)$, 使得对 u、$v\in X$, 由

$$|Q_{N_0}(S_*u-S_*v)|>|P_{N_0}(S_*u-S_*v)|$$

推出

$$|S_*u-S_*v|<\delta|u-v|. \tag{30.16}$$

令 $W_*=S_*u-S_*v$. 考虑

$$\lambda_*=\frac{\|W_*\|^2}{|W_*|^2}.$$

由正交投影 P_{N_0} 和 Q_{N_0} 的选择，可知在 H 和 V 下 $P_{N_0}W_*$ 正交于 $Q_{N_0}W_*$. 因此

$$\begin{aligned}\lambda_*&=\frac{\|P_{N_0}W_*+Q_{N_0}W_*\|^2}{|P_{N_0}W_*+Q_{N_0}W_*|^2}\\&=\frac{\|P_{N_0}W_*\|^2+\|Q_{N_0}W_*\|^2}{|P_{N_0}W_*|^2+|Q_{N_0}W_*|^2}\geqslant\frac{1}{2}\frac{\|Q_{N_0}W_*\|}{|Q_{N_0}W_*|}.\end{aligned} \tag{30.17}$$

又因

$$\|Q_{N_0}W_*\|^2=(AQ_{N_0}W_*,\ Q_{N_0}W_*)\geqslant\lambda_{N_0+1}|Q_{N_0}\cdot W_*|^2, \tag{30.18}$$

推出

$$\lambda_*>\frac{1}{2}\lambda_{N_0+1}. \tag{30.19}$$

我们要从 $\lambda_*>\frac{1}{2}\lambda_{N_0+1}$ 推出 $|W_*|<\delta|u-v|$. 为此，设有方程(30.3)满足初值 u_0 和 v_0 的两个解 u 和 v. 令 $W(t)=u(t)-v(t)$, 则 W 满足

$$\frac{dW}{dt}+AW+R(u)-R(v)=0, \tag{30.20}$$

$$W(0)=u_0-v_0=W_0. \tag{30.21}$$

首先，我们估计 $S(t)$的 Lip 常数 L. 在 H 上作(30.20)与 W 的内积，得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|W|^2+\|W\|^2+(R(u)-R(v),\ W)=0. \tag{30.22}$$

由假设(30.15)估计非线性项

$$\begin{aligned}&|(R(u)-R(v),\ W)|\\&\quad\leqslant C_0|A^\beta W||W|\leqslant C_0|W|^{1-2\beta}|A^{\frac{1}{2}}W|^{2\beta}|W|\\&\quad\leqslant C_0|W|^{2(1-\beta)}\|W\|^{2\beta},\end{aligned} \tag{30.23}$$

其中我们用到了标准的插值不等式，$\beta\in\left(0,\ \frac{1}{2}\right]$. 再利用 Young 不等式 $p=\frac{1}{\beta}$, $q=\frac{1}{1-\beta}$, 由(30.22)、(30.23)得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|W|^2+\|W\|^2\leqslant C_0|W|^{2(1-\beta)}\|W\|^{2\beta}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}C_1|W|^2+\frac{\|W\|^2}{2}. \qquad (30.24)$$

在(30.24)左端忽略 $\|W\|^2$,

$$\frac{d}{dt}|W|^2\leqslant C_1|W|^2, \qquad (30.25)$$

其中 C_1 为仅依赖于 C_0 和 β 的常数. 由格隆沃尔不等式和(30.25), 得:

$$L=\mathrm{Lip}_a(S(t))\leqslant e^{C_1t}.$$

现回到寻求投影 P_{N_0}, 使得具有挤压性质. 从(30.24)有

$$\frac{d}{dt}|W(t)|^2+\|W\|^2\leqslant C_1|W|^2. \qquad (30.26)$$

记
$$\lambda(t)=\frac{\|W(t)\|^2}{|W(t)|^2}, \quad \xi(t)=\frac{W(t)}{|W(t)|},$$

可得

$$\frac{d}{dt}|W|^2+(\lambda(t)-C_1)|W|^2\leqslant 0. \qquad (30.27)$$

由格隆沃尔不等式, (30.27)推出

$$|W(t)|^2\leqslant\exp\left\{-\int_0^t\lambda(\tau)d\tau+C_1t\right\}|W(0)|^2. \qquad (30.28)$$

取 $t=t_*$, $W(t_*)=W_*$, 可得

$$|S_*u-S_*v|=|W_*|\leqslant\delta(t_*)|u_0-v_0|,$$

其中

$$\delta_*=\delta(t_*)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^{t_*}\lambda(\tau)d\tau+C_1t_*\right\}. \qquad (30.29)$$

由(30.19), 当 $\lambda_*=\lambda(t_*)>\frac{1}{2}\lambda_{N_0+1}$, 且 $N_0\to+\infty$ 时, $\lambda_{N_0+1}\to\infty$. 然而, 对于商模 $\lambda(\tau)$, $\tau<t_*$ 的行为是未知的. 以下引理使我

们可控制商模的过去.

引理 1 设 $\lambda(t)$ 和 $\xi(t)$ 如(30.4)所定义, 则 $\lambda(t)$ 满足微分不等式

$$\frac{d}{dt}\lambda(t)\leqslant C_0^2\lambda^{2\beta}(t). \tag{30.30}$$

如 $\lambda(t_*)>\lambda_0$, 则

$$\int_0^{t_0}\lambda(t)dt\geqslant\frac{1}{C_3}(1-e^{-C_3t_*})\lambda_0-\frac{C_2}{C_3}t_*, \tag{30.31}$$

其中 C_3 和 C_2 仅依赖于 C_0 和 β.

证明

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\lambda(t)&=\frac{1}{|W|^2}[(W_t,AW)-(W_t,W)\lambda(t)]\\&=\frac{1}{|W|}(W_t,(A-\lambda)\xi)\\&=\frac{1}{|W|}(-AW-(R(u)-R(v)),(A-\lambda)\xi),\end{aligned} \tag{30.32}$$

其中最后等式用到了(30.20).

$$\begin{aligned}(\lambda\xi,(A-\lambda)\xi)&=\lambda(\xi,A\xi)-\lambda^2|\xi|^2=\lambda\|\xi\|^2-\lambda^2\\&=\lambda\frac{\|W\|^2}{|W|^2}-\lambda^2=0.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}|(A-\lambda)\xi|^2&=((A-\lambda)\xi,(A-\lambda)\xi)=(A\xi,(A-\lambda)\xi)\\&=\frac{1}{|W|}(AW,(A-\lambda)\xi).\end{aligned} \tag{30.33}$$

联合(30.33)和(30.32), 可得:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\lambda(t)+|(A-\lambda(t))\xi|^2\\&\quad=\frac{1}{|W|}(R(u)-R(v),(A-\lambda)\xi)\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{1}{|W|}|R(u)-R(v)||(A-\lambda)\xi|$$

$$\leqslant \frac{C_0}{|W|}|A^\beta W||(A-\lambda)\xi|$$

$$\leqslant \frac{1}{|W|}C_0|W|^{1-2\beta}\|W\|^{2\beta}|(A-\lambda)\xi|$$

$$\leqslant C_0\lambda^\beta|(A-\lambda)\xi|$$

$$\leqslant \frac{C_0^2}{2}\lambda^{2\beta}+\frac{1}{2}|(A-\lambda)\xi|^2, \tag{30.34}$$

其中我们用得到了(30.15)、(30.23)和简单的 Young 不等式 $p=q=2$. 再简化一下,(30.34)可得

$$\frac{d}{dt}\lambda(t)\leqslant C_0\lambda^{2\beta}(t).$$

这就证明了引理的第一部分. 利用 Young 不等式,得

$$\frac{d}{dt}\lambda(t)\leqslant C_3\lambda(t)+C_2, \tag{30.35}$$

其中 C_2 和 C_3 依赖于 C_0 和 β. 如 $\beta=\frac{1}{2}$, 则 $C_3=C_0^2$, $C_2=0$. 由格隆沃尔不等式,(30.35)给出

$$\lambda(t)\leqslant e^{C_3(t-t_0)}\lambda(t_0)-(1-e^{C_3(t-t_0)})\frac{C_2}{C_3}.$$

因此,对 $0\leqslant t_0<t$, 得到相反的不等式

$$\lambda(t_0)\geqslant e^{C_3(t_0-t_*)}\lambda(t_*)-\frac{C_2}{C_3}>e^{C_3(t_0-t_*)}\lambda_0-\frac{C_2}{C_3}.$$

再作 0 到 t_* 的积分,可得

$$\int_0^{t_*}\lambda(t_0)dt_0\geqslant\frac{1}{C_3}(1-e^{-C_3t_*})\lambda_0-\frac{C_2}{C_3}t_*.$$

作为引理 1 的简单推论,(30.29)能估计为

$$\delta_*\leqslant\exp\left\{-\frac{1}{C_3}(1-e^{-C_3t_*})\cdot\frac{\lambda_{N_0+1}}{2}+\left(\frac{C_2}{C_3}+C_1\right)t_*\right\}. \tag{30.36}$$

其中我们用到了 $\lambda_*=\lambda(t_*)\geqslant\frac{\lambda_{N_0+1}}{2}$.

因 C_3 依赖于 β 和 C_0, t_* 能选取为 $C_3 t_*=1$, 因此

$$\delta_* \leqslant \exp\left\{-\frac{1}{2C_3}\lambda_{N_0+1}+\frac{\frac{C_2}{C_3}+C_1}{C_3}\right\}. \qquad (30.37)$$

最后, 如 N_0 充分大, 使得

$$\lambda_{N_0+1} > -4C_3 \ln\left(\frac{1}{8}\right)+4\left(\frac{C_2}{C_3}+C_1\right),$$

则由(30.37), 有

$$\delta_* < \frac{1}{8}.$$

这就完成了命题 1 的证明.

推论 1 在命题 1 的假设下, 存在常数 C_1、C_2、C_3, 它们仅依赖于(30.15)中的 C_0 和 β, 使得如果

$$t_* = \frac{1}{C_3},$$

则

$$L_* = \mathrm{Lip}_x(S_*) \leqslant e^{\frac{C_1}{C_3}}. \qquad (30.38)$$

进一步, 如 N_0 充分大, 使得

$$\lambda_{N_0+1} > 12C_3 \ln 2 + 4\left(\frac{C_2}{C_3}+C_1\right),$$

则对任何 u、$v \in X$,

$$|Q_{N_0}(S_*u - S_*v)| > |P_{N_0}(S_*u - S_*v)|,$$

推出 $\delta_* < \frac{1}{8}$,

$$|S_*u - S_*v| < \delta_* |u-v|.$$

换言之, S_*: $X \to X$ 是 Lip 函数, 具有 Lip 常数 L_*, 如(30.38)所估计, 它具有挤压性质, 其中 $\delta < \frac{1}{8}$.

从定理 1 可得(S_*, X)的惯性集的存在性.

定理 2 在命题 1 的假设之下, 且设由(30.14)定义的映射 $F(t, x)=S(t)x$ 是 Lip 的: $[0, T]\times X \to X$, $\forall T>0$; 流 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 由(30.3)所确定, 则存在惯性集 M, 它的维数估计为

$$d_F(M) \leqslant d_F(M^*) + 1. \qquad (30.39)$$

证明 作为定理1和推论1的简单推论，我们得到映射 $S_* = S(t_*)$ 在 X 上具有惯性集 M_*，使得

$$\mathrm{dist}(S_*^n X, M_*) \leqslant \theta^n R = C_4 \delta_*^n$$

更进一步，有

$$d_F(M^*) \leqslant \max\{N_0, \alpha(X)\} \leqslant N_0\{1, C_5\},$$

其中 $C_5 = \ln\left(\frac{2L_*}{\delta_*} - 1\right) \Big/ \ln\left(\frac{1}{4\delta_*}\right)$ 是一常数，它能用 C_1、C_2 和 C_3 估计．记

$$M = \bigcup_{0 \leqslant t \leqslant t_*} S(t) M_*.$$

显然，$M \subseteq X$，且由映射 $F(t, X)$ 在 $[0, T] \times X$ 上的连续性，它是紧的．从 $\mathscr{A} \subseteq M_*$ 推出 $\mathscr{A} \subseteq M$．我们注意到 M 是 $[0, t_*] \times M_*$ 在 F 下的象，因 Lip 函数保持分形维数．

$$d_F(M) \leqslant d_F([0, t_*] \times M_*) \leqslant d_F(M_*) + 1.$$

现证 M 在流作用下不变．考虑两种情况．如 $t \in (0, t_*]$，由 $S_* M_* = S(t_*) M_* \subset M_*$，可得

$$\begin{aligned} S(t) M &= \bigcup_{t \leqslant s \leqslant t_* + t} S(s) M_* \\ &= \Big(\bigcup_{t \leqslant s \leqslant t_*} S(s) M_*\Big) \cup \Big(\bigcup_{t_* \leqslant s \leqslant t_* + t} S(\tau) M_*\Big) \\ &\subseteq M \cup \Big(\bigcup_{0 \leqslant s \leqslant t} S(s) M_*\Big) \subseteq M. \end{aligned} \qquad (30.40)$$

对 $t > t_*$，记 $t = k t_* + S$，$k > 0$，$s \in [0, t_*]$，则

$$\begin{aligned} S(t) M &= S(k t_*) S(s) M \subseteq S^k(t_*) M \\ &= S_*^k M \subseteq \bigcup_{0 \leqslant s \leqslant t_*} S(s) S_*^k M_* \\ &\subseteq \bigcup_{0 \leqslant s \leqslant t_*} S(s) M_* = M. \end{aligned} \qquad (30.41)$$

最后，关于指数收敛，对 $t = k t_* + s$，

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}(S(t) X, M) &= \mathrm{dist}(S(s) S_*^k X, M) \\ &\leqslant L_* \mathrm{dist}(S_*^k X, M) \leqslant L_* C_4 \delta_*^k \\ &= (L_* C_4) \delta_*^{(t-s)/t_*} \leqslant C_6 (\delta_*^{\frac{1}{t_*}})^t = C_6 \delta_0^t, \end{aligned}$$

(30.42)

其中常数 C_6 依赖于 C_1、C_2、C_3 和 $\delta_0=\delta_*^{C_5}<\left(\frac{1}{8}\right)^{C_4}$. 这就完成了 M 对于$(\{S(t)\}_{t\geq 0}, X)$是一惯性集的证明.

现举两个求惯性集的具体例子.

[例1] 考虑黑本-西瓦申斯基方程

$$u_t+u_{xxxx}+u_{xx}-uu_x=0. \tag{30.43}$$

设 $u(\cdot, t)$ 定义在$\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$上, 是奇的, L 周期的, $L\geqslant 1$. 令

$H=\left\{u\in L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right); u \text{ 为奇函数, 在}\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]\text{上}\right\}$, 则集合

$$B=\left\{u\in H\mid u_x\in L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right), |u|_{L^2}\leqslant\rho_0, |u_x|_{L^2}\leqslant\rho_1\right\} \tag{30.44}$$

对 H 的一切有界子集是吸收的, 其中

$$\rho_0=C_0L^{\frac{5}{2}}, \quad \rho_1=C_1L^{\frac{7}{2}}, \tag{30.45}$$

这里 C_0 和 C_1 是绝对常数. 对于 $u\in B$, 有

$$|u|_{L^\infty}\leqslant|u|_{L^2}^{\frac{1}{2}}|u_x|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\leqslant(\rho_0\rho_1)^{\frac{1}{2}}=(C_0C_1)^{\frac{1}{2}}L^3. \tag{30.46}$$

为简化计, 令 $u'=u_x$, 则可写(30.43)为

$$\begin{cases}u_t+u''''+u''-uu'=0,\\ u(0)=u_0, \ \text{in } H.\end{cases} \tag{30.47}$$

我们估计解算子 $S(t)$ 在吸收集上的 Lip 常数 L. 设在 B 中给定初值 u_0 和 v_0, $u(x, t)$ 和 $v(x, t)$是(30.43)的两个解, 则差 $W(x, t)=u(x, t)-v(x, t)$满足

$$W_t+W''''+W''-(2W\bar{u})'=0, \tag{30.48}$$

$$W(0)=u_0-v_0, \tag{30.49}$$

其中 $\bar{u}=\frac{1}{2}(u+v)\in B$. (30.48)与 W 作内积, 得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|W|_{L^2}^2+|W''(t)|_{L^2}^2=|W'(t)|_{L^2}^2-(\bar{u}'(t), W^2(t))_{L^2}. \tag{30.50}$$

因

$$|W'(t)|^2_{L^2} \leqslant |W(t)|_{L^2}|W''(t)|_{L^2}$$
$$\leqslant \frac{1}{2}|W(t)|^2_{L^2} + \frac{1}{2}|W''(t)|_{L^2}$$

和

$$|(\bar{u}'(t),\ W^2(t))_{L^2}| = |(\bar{u}(t),\ 2W(t)W'(t))_{L^2}|$$
$$\leqslant 2|\bar{u}(t)|_{L^\infty}|W(t)|_{L^2}|W'(t)|_{L^2}$$
$$\leqslant 2|\bar{u}(t)|_{L^\infty}|W(t)|^{\frac{3}{2}}_{L^2}|W''(t)|^{\frac{1}{2}}_{L^2}$$
$$\leqslant \frac{3}{4}(2)^{\frac{4}{3}}|\bar{u}(t)|^{\frac{4}{3}}_{L^\infty}|W(t)|^2_{L^2} + \frac{1}{4}|W''(t)|^2_{L^2},$$

简化为

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|W(t)|^2_{L^2} + \frac{1}{4}|W''(t)|^2_{L^2}$$
$$\leqslant \frac{1}{2}|W(t)|^2_{L^2} + 2|\bar{u}(t)|^{\frac{4}{3}}_{L^\infty}|W(t)|^2_{L^2}. \qquad (30.51)$$

利用 $|\bar{u}(t)|^2_{L^\infty} \leqslant |\bar{u}(t)|_{L^2}|\bar{u}'(t)|_{L^2} \leqslant \rho_0\rho_1 = C_0C_1L^6$ 可得

$$\frac{d}{dt}|W(t)|^2_{L^2} + \frac{1}{2}|W''(t)|^2_{L^2} \leqslant (1 + 4(C_0C_1)^{\frac{2}{3}}L^4)|W(t)|^2_{L^2}$$
$$\leqslant (1 + C_2L^4)|W(t)|^2_{L^2}, \qquad (30.52)$$

其中 $C_2 = 4(C_0C_1)^{\frac{2}{3}}$. 在(30.52)中,忽略左端的 $\frac{1}{2}|W''(t)|^2_{L^2}$,用格隆沃尔不等式,可得

$$|W(t)|^2_{L^2} \leqslant \exp[(1 + C_2L^4)t]|W(0)|^2_{L^2}.$$

因此

$$L = \mathrm{Lip}_B(S(t)) \leqslant \exp\left[\frac{1}{2}(1 + C_2L^4)t\right]. \qquad (30.53)$$

由 $\lambda(t) = |W''(t)|^2_{L^2}/|W(t)|^2_{L^2}$、$\xi(t) = \frac{W(t)}{|W(t)|}$, (30.52)可写为

$$\frac{d}{dt}|W(t)|^2_{L^2} + \left[\frac{1}{2}\lambda(t) - (1 + C_2L^4)\right]|W(t)|^2_{L^2} \leqslant 0.$$

因此(30.28)具有形式

$$|W(t)|_{L^2}^2 \leqslant \delta(t) |W(0)|_{L^2}, \tag{30.54}$$

其中

$$\delta(t) = \frac{1}{2} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\int_0^t \lambda(\tau)d\tau + (1+C_2L^4)t \right\}. \tag{30.55}$$

为了证明 $S_* = S(t_*)$ 的挤压性质，记

$$t_* = L^{-4}. \tag{30.56}$$

由(30.19)，

$$\lambda_* = \lambda(t_*) \geqslant \frac{1}{2} \lambda_{N_0+1}, \tag{30.57}$$

其中 λ_{N_0+1} 为算子 $Au = u''''$ 在 H 上的第(N_0+1)个特征值. 因此

$$\lambda_{N_0+1} = \left(2\pi \frac{N_0+1}{L}\right)^4. \tag{30.58}$$

从(30.34)，有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \lambda(t) + |(A-\lambda(t))\xi(t)|_{L^2}^2 \\ &= (\xi'(t) - (2\bar{u}\xi)',\ (A-\lambda(t))\xi(t))_{L^2}. \end{aligned} \tag{30.59}$$

利用施瓦兹不等式和 Young 不等式，推出

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\lambda(t) &\leqslant \frac{1}{2} |\xi'(t) - (2\bar{u}(t)\xi(t)'|_{L^2}^2 \\ &\leqslant |\xi'(t)|^2 + 2|\bar{u}'(t)\xi(t)|_{L^2}^2 + 2|\bar{u}(t)\xi'(t)|_{L^2}^2 \\ &\leqslant |\xi(t)|_{L^2} |\xi''(t)|^2_{L^2} + 4|\bar{u}(t)|_{L^2}^2 |\xi(t)|_{L^2}^2 \\ &\quad + 4|\bar{u}(t)|_{L^2}^2 |\xi'(t)|_{L^2}^2 \\ &\leqslant |\xi''(t)|_{L^2} + 4\rho_1^2 |\xi(t)|_{L^2} |\xi'(t)|_{L^2} \\ &\quad + 4|\bar{u}(t)|_{L^2} |\bar{u}'(t)|_{L^2} |\xi(t)|_{L^2} |\xi''(t)|_{L^2} \\ &\leqslant \lambda(t) + 4\rho_1^2 |\xi(t)|_{L^2}^{\frac{1}{2}} |\xi''(t)|_{L^2}^{\frac{1}{2}} + 4\rho_0\rho_1\lambda^{\frac{1}{2}}(t) \\ &\leqslant \lambda(t) + 4\rho_1^2\lambda(t)^{\frac{1}{4}} + 4\rho_0\rho_1\lambda(t)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{30.60}$$

为使不等式(30.60)齐次化，引入新的正参数 β，

$$\beta = L^4 - 1. \tag{30.61}$$

由 Young 不等式,

$$4\rho_1^2\lambda(t)^{\frac{1}{4}}\leqslant\frac{\beta}{2}\lambda(t)+8(\rho_1^8/\beta)^{\frac{1}{3}},\tag{30.62}$$

$$4\rho_0\rho_1\lambda(t)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{\beta}{2}\lambda(t)+\frac{32}{\beta}\rho_0^2\rho_1^2.\tag{30.63}$$

因此,联合(30.60)、(30.61)和(30.62),可得

$$\frac{d}{dt}\lambda(t)\leqslant(\beta+1)\lambda(t)+8\left(\frac{\rho_1^8}{\beta}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{32}{\beta}\rho_0^2\rho_1^2.\tag{30.64}$$

由格隆沃尔不等式, $0\leqslant t\leqslant t_*$, 有

$$\lambda_*=\lambda(t_*)\leqslant e^{(\beta+1)(t_*-t)}\left(\lambda(t)+\left(8\left(\frac{\rho_1^8}{\beta}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{32}{\beta}\rho_0^2\rho_1^2\right)t_*\right).\tag{30.65}$$

由(30.57),有

$$\lambda(t)\geqslant\frac{1}{2}\lambda_{N_*+1}e^{(\beta+1)(t-t_*)}-\left[8\left(\frac{\rho_1^8}{\beta}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{32}{\beta}\rho_0^2\rho_1^2\right]t_*.\tag{30.66}$$

对(30.66)从 0 到 t_* 积分,得:

$$\int_0^{t_*}\lambda(t)dt\geqslant\frac{1}{2(\beta+1)}(1-e^{-(\beta+1)t_*})\lambda_{N_*+1}$$
$$-\left[[illegible]\left(\frac{\rho_1^8}{\beta}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{16}{\beta}\rho_0^2\rho_1^2\right]t_*^2.\tag{30.67}$$

由此,由(30.55),有

$$\delta_*=\delta(t_*)\leqslant\frac{1}{2}\exp\left\{-\frac{1-e^{-(\beta+1)t_*}}{4(\beta+1)}\lambda_{N_*+1}\right.$$
$$\left.+\left[4\left(\frac{\rho_1^8}{\beta}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{16}{\beta}\rho_1^2\rho_0^2\right]t_*+(1+C_3L^4)t_*\right\}.\tag{30.68}$$

将(30.45)、(30.56)和(30.61)代入(30.67),并利用

$$1-\exp(-(\beta+1)t_*)=1-e^{-\frac{1}{2}}>\frac{1}{2},$$

可得

$$\delta_*\leqslant\frac{1}{2}\exp\left\{-\frac{1}{8L^4}\lambda_{N_*+1}+C_3\right\}. \qquad (30.69)$$

其中 C_3 仅依赖于 C_0 和 C_1. 由(30.58), 有

$$\delta_*\leqslant\frac{1}{2}\exp\left\{-\frac{2\pi^4}{L^8}(N_0+1)^4+C_3\right\}. \qquad (30.70)$$

因此, 如果 $N_0=C_4L^2$, $C_4=\left(\frac{2\ln 2+C_3}{2\pi^4}\right)^{\frac{1}{4}}$, 则 $\delta_*<\frac{1}{8}$. 综合一下作为定理 2 的推论的结果, 我们有:

命题 2 对于黑本-西瓦申斯基方程(30.43), 存在在吸引集B中的惯性集 M_0, 它的分形维数可估为

$$d_F(M_0)\leqslant C_7L^2, \qquad (30.71)$$

其中常数 C_7 仅依赖于绝对常数 C_0 和 C_1, 它们为(30.46)所确定。进一步, 存在正常数 C_6 和 C_9, 使得对一切 $t\geqslant 0$, 有

$$\mathrm{dist}_{L^2}(S(t)B,\ M_0)\leqslant C_9e^{-C_6L^4t}. \qquad (30.72)$$

证明 记 $t_*=L^{-4}$. 由(30.53), $S_*=S(t_*)$为在 B 的 Lip 函数, 具 Lip 常数

$$L_*=\mathrm{Lip}_B(S(t_*))\leqslant\exp\left(\frac{1}{2}(1+C_2L^4)t_*\right)\leqslant e^{C_5},$$

满足挤压性质. 由定理 1, S_* 具有惯性分形集 $M_*\subseteq B$, 使得

$$\begin{aligned}d_F(M_*)&\leqslant\max\{\alpha(B),\ N_0\}\\&\leqslant N_0\max\left\{1,\ \frac{\log\left(\frac{2L_*}{\delta_*}+1\right)}{\log\frac{1}{\theta_*}}\right\},\end{aligned} \qquad (30.73)$$

$L_*\leqslant\rho^{C_5}$, $N_0=C_4L^2$, $\delta_*=e^{-C_6}$. 由(30.69), $\theta_*=4\delta_*$, 分形维数可估计为

$$d_F(M_*)\leqslant C_7L^2, \qquad (30.74)$$

其中 C_7 仅依赖于 C_0 和 C_1. 由定义

$$M_0=\bigcup_{0\leqslant t\leqslant t_*}S(t)M_*,$$

如定理 2 的证明, 可知 M_0 为惯性集, 且

$$d_F(M_0)\leqslant 2C_7L^2. \tag{30.75}$$

由(30.42),

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}_{L^2}(S(t)B,\ M_0)&\leqslant C_8L_*[(\delta_*)^{\frac{1}{L_*}}]^t\\&\leqslant C_9(\delta_*^{1/L_*})^t\leqslant C_9e^{-C_{10}L^{*}t}.\end{aligned} \tag{30.76}$$

[例 2] 柯尔莫戈洛夫–西瓦申斯基–Spiegel 方程(KSS 方程)

$$u_t+u''''+[(2-\delta(u')^2u']'+(u')^2+\alpha u=0. \tag{30.77}$$

$u(\cdot,\ t)$定义在$[0,\ L]$上,具有 L 周期;参数 α 和 δ 是正的,且 $\alpha<1$, $L>1$. 首先证明吸收集

$$B=\{u\in L^2[0,\ L],\ |u'|_{L^2}\leqslant\rho_1,\ |u''|_{L^2}\leqslant\rho_2\}$$

是存在的,其中

$$\rho_1=\delta^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}},\qquad \rho_2=C_0\rho_1(1+\delta^{-\frac{1}{4}}+L). \tag{30.78}$$

考虑如下的希尔伯特空间

$$H=L^2[0,\ L],\qquad V=\{u\in H^1(0,\ L);\ u\ 为\ L\ 周期\}.$$

由局部存在定理,知(30.77)存在具有初值 $u_0\in V$ 的解,$t\in[0,t_0)$, $t_0>0$.

引理 2 设 u 为(30.77)在 $V\times[0,t_0)$上的解,则对$t\in[0,t_0)$, $|u'(t)|_{L^2}\geqslant\rho_1$,推出

$$\frac{d}{dt}|u'(t)|_{L^2}<0. \tag{30.79}$$

证明 令 $v=u'$,则 v 满足

$$v_t+v''''+2v''+2vv'-\delta(v^3)''+\alpha v=0.$$

因此,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v|_{L^2}^2+|v''|_{L^2}^2+3\delta(v^2,\ (v')^2)_{L^2}+\alpha|v|_{L^2}^2=2|v'|_{L^2}^2. \tag{30.80}$$

由标准插值,

$$|v'|_{L^2}\leqslant|v|_{L^2}|v''|_{L^2}\leqslant\frac{1}{2}|v|_{L^2}^2+\frac{1}{2}|v''|_{L^2}^2.$$

因此

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v|_{L^2}^2+3\delta(v^2,\ v')^2)_{L^2}+\alpha|v|_{L^2}^2\leqslant|v|_{L^2}^2. \quad (30.81)$$

因 $\alpha<1$，如对某个 $t\in[0,\ t_0)$，$\frac{d}{dt}|v(t)|_{L^2}\geqslant 0$，则从(30.80)、(30.81)，有

$$3\delta(v^2,\ (v')^2)_{L^2}\leqslant\min\{2|v'|_{L^2}^2,\ (1-\alpha)|v|_{L^2}^2\}. \quad (30.82)$$

令 $v^2\sim\sum_m C_m W_m$ 为 v^2 在 $L^2[0,\ L]$ 上的傅里叶展开，其中

$$W_m(x)=\exp\left\{\frac{2\pi i}{L}mx\right\}.$$

再写(30.82)的左端为

$$\begin{aligned}3\delta(v^2,\ (v')^2)_{L^2}&=\frac{3\delta}{2}\int_0^L((v^2)')^2dx\\&=\frac{3}{2}\delta\left|\sum_{m\neq 0}\frac{\pi i m}{2}C_m W_m\right|_{L^2}^2\\&=\frac{3\delta}{2}\frac{4\pi^2}{L^2}\sum_{m\neq 0}m^2C_m^2|W_m|_{L^2}^2\\&=\frac{6\delta\pi^2}{L^2}\sum_{m\neq 0}m^2C_m^2\cdot L=\frac{6\delta\pi^2}{L}\sum_{m\neq 0}m^2C_m^2\\&=\frac{6\delta\pi^2}{L}\sum_{m\neq 0}m^2C_m^2.\end{aligned}$$

联合(30.82)，可得

$$\frac{6\delta\pi^2}{L}\sum_{m\neq 0}m^2C_m^2\leqslant\min\{2|v'|_{L^2}^2,\ (1-\alpha)|v|^2\}. \quad (30.83)$$

另一方面，因 $|v|_{L^2}^2=|v^2|_{L^1}^2=L^2C_0^2$，

$$\begin{aligned}\left|v(x)^2-\frac{1}{L}|v|_{L^2}^2\right|_{L^\infty}&=\sum_{m\neq 0}C_m\leqslant\left(\sum_{m\neq 0}\frac{1}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{m\neq 0}m^2C_m^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\left(\frac{\pi^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{L(1-\alpha)}{6\delta\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}}|v|_{L^2}\\&=\frac{1}{\sqrt{18}}\left(\frac{L(1-\alpha)}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}}|v|_{L^2}. \quad (30.84)\end{aligned}$$

最后,

$$0<2|v'|_{L^2}^2-3\delta\int_0^L v^2(v')^2dx\leqslant\int_0^L(v')^2(2-3\delta v^2)dx$$

$$\leqslant|v'|_{L^2}^2|2-3\delta v^2|_{L^\infty}\leqslant|v'|_{L^2}^2(2-3\delta)|v^2|_{L^\infty}$$

$$\leqslant|v'|_{L^2}^2\left(2-3\delta\left(\frac{1}{L}|v|_{L^2}^2-\left|v^2(x)-\frac{1}{L}|v|_{L^2}^2\right|_{L^\infty}\right)\right)$$

$$\leqslant|v'|_{L^2}^2\left(2-\frac{3\delta}{L}|v|_{L^2}^2+\frac{3\delta}{\sqrt{18}}\left(\frac{L(1-\alpha)}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}}|v|_{L^2}\right).\tag{30.85}$$

令 $f(r)=2-\frac{3\delta}{L}r^2+\left(\frac{\delta L(1-\alpha)}{2}\right)^{\frac{1}{2}}r$,则对

$$r\geqslant\delta^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}\alpha^a,\qquad a\geqslant\ln\left(\frac{1-\alpha}{18}\right)\Big/2\ln\alpha,$$

$$f(r)\leqslant 0.$$

因此,如 $|v|_{L^2}\geqslant\delta^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}\alpha^a$, 则(30.85)的右端是负的. 由于矛盾性,对 t 使得 $|v(t)|_{L^2}\geqslant\delta^{-1}L^{\frac{3}{2}}\alpha^a$,必须有

$$\frac{d}{dt}|v(t)|_{L^2}<0.$$

由以上引理, 可知集合 $B_0=\{u\in H:\ |u'|_{L^2}\leqslant\rho_1\}$ 是解算子 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$, $t<t_0$ 的吸收集. 由此可推出整体解的存在性. 下面考虑在 $H^2(0, L)$上的吸收集.

引理3 令

$$B=\{u\in H\,|\,|u'|_{L^2}\leqslant\rho_1,\ |u''|_{L^2}\leqslant\rho_2\},\tag{30.86}$$

其中 ρ_1 和 ρ_2 为(30.78)所确定, 则B是方程(30.77)在 H 中的吸收集.

证明 如同引理2, 考虑 $v=u'$ 和 $w=v'=u''$ 满足的方程. 首先, 由(30.80), 有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v|^2+|v''|^2+3\delta|vv'|^2+\alpha|v|^2=2|v'|^2$$

$$\leqslant 2|v||v''|.$$

上式对 t 从 t_0 到 t 积分,并利用 $|v|\leqslant\rho_1$,有

$$\int_{t_0}^t(|v''(s)|^2+3\delta|vv'(s)|^2+\alpha|v(s)|^2)ds$$

$$\leqslant 2\rho_1\int_{t_0}^t|v''(s)|ds+\frac{1}{2}\rho_1^2$$

$$\leqslant 2\rho_1(t-t_0)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{t_0}^t|v''(s)|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\rho_1^2$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int_{t_0}^t|v''(s)|^2ds+2\rho_1^2(t-t_0)+\frac{1}{2}\rho_1^2.$$

因此

$$\int_{t_0}^t(|v''(s)|^2+6\delta|vv'(s)|^2+2\alpha|v(s)|^2)ds$$

$$\leqslant\rho_1^2(4(t-t_0)+1). \tag{30.87}$$

对 $t-t_0\leqslant 1$,从 $|v'|^4\leqslant|v|^2|v''|^2$,有

$$\int_{t_0}^t|v'|^4ds\leqslant 5\rho_1^4. \tag{30.88}$$

因此,存在 $s_0\in[t_0,\ t]$,使得 $|v'(s_0)|\leqslant 5^{\frac{1}{4}}\rho_1$.

其次,考虑 $w=v'=u''$ 满足的方程

$$w_t+w''''+2w''-3\delta(v^2w)'+(2vw)'+\alpha w=0.$$

由此可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|^2+|w''|^2+\alpha|w|^2$$

$$=2|w'|^2-3\delta(v,\ w^3)+(w,\ w^2)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}|w''|^2+2|w|^2+(3\delta|v|_{L^\infty}+1)\int_0^L w^3(x)dx$$

$$\leqslant\frac{1}{2}|w''|^2+2|w|^2+(3\delta|v|^{\frac{1}{2}}|w|^{\frac{1}{2}}+1)|w|^2|w'|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}|w''|^2+2|w|^2+(3\delta\rho_1^{\frac{1}{2}}w^{\frac{1}{2}}+1)|w|^{\frac{5}{2}}|w''|^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant|w''|^2+2|w|^2+(3\delta\rho_1^{\frac{1}{2}})^{\frac{4}{3}}|w|^4+|w|^{\frac{10}{3}}.$$

由(30.88),$\int_{t_0}^t|w|^4\leqslant 5\rho_1^4$. 因此,由一致格隆沃尔引理推得 $|w(t)|^2$

对一切 $t\geqslant t_0$ 保持有界. 但我们的目标是想得到 $|w(t)|^2$ 的显界。考虑泛函

$$V(v)=\frac{1}{2}|v'|^2-|v|^2+\frac{1}{4}\delta|v^2|^2,$$

则沿轨线 $\{v(t)\}_{t\geqslant 0}$, 它的变化为

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(v(t))&=\dot{V}(t)=\left(-v''-2v+\delta v^3,\ \frac{dv}{dt}\right)\\
&=(-v''-2v+\delta v^3,\ (-v''-2v+\delta v^3)''-2vv'-\alpha v)\\
&=-|(v''+2v-\delta v^3)'|^2+2(v'',\ vv')-\alpha|v'|^2\\
&\quad+2\alpha|v|^2-\delta\alpha|v^2|^2\\
&\leqslant-2\alpha V-\frac{\alpha\delta}{2}|v^2|^2+2(v'',\ vv')\\
&\leqslant-2\alpha V+2(v'',\ vv')\\
&\leqslant-2\alpha V+\frac{|v''|^2}{\sqrt{6\delta}}+\sqrt{6\delta}\,|vv'|^2\\
&\leqslant-2\alpha V+\frac{1}{\sqrt{6\delta}}(|v''|^2+6\delta|vv'|^2). \qquad t\geqslant t_0
\end{aligned}$$

上式对 t 从 t_0 到 t 积分, 利用(30.87), 可得

$$\begin{aligned}
V(t)&\leqslant\exp(2\alpha(t_0-t))V(t_0)+\exp(-2\alpha t)\frac{1}{\sqrt{6\delta}}5\rho_1^2\\
&\leqslant V(t_0)+5\rho_1^2/\sqrt{6\delta}\\
&\leqslant\frac{1}{2}|v'(t_0)|^2+\frac{\delta}{4}|v^2(t_0)|^2+3\rho_1^2/\delta^{\frac{1}{2}}. \qquad (30.89)
\end{aligned}$$

另一方面, 对函数 $u=v^2-\frac{1}{L}\int_0^L v^2$, 应用 Poincaré 不等式有

$$|u|^2\leqslant\frac{L^2}{4\pi^2}|u'|^2=\frac{L^2}{4\pi^2}|(v^2)'|^2=\frac{L^2}{\pi^2}|vv'|^2.$$

因 $|u|^2=\left|v^2(x)-\frac{1}{L}\int_0^L v^2(y)dy\right|_{L^2}=|v^2|^2-\frac{1}{L}|v|^4$, 因此

$$|v^2|^2-\frac{1}{L}|v|^4<\frac{L^2}{\pi^2}|vv'|^2.$$

上式对 t 从 t_0 到 t 积分, 利用(30.87)和 $t_0=t-1$, 得

$$\delta\int_t^{t+1}|v^2(\tau)|_{L^2}^2 d\tau\leqslant\frac{\delta}{L}\int_t^{t+1}|v(\tau)|_{L^4}^4 d\tau+\frac{L^2}{4\pi^2}5\rho_1^2$$

$$\leqslant\frac{\delta}{L}\rho_1^4+\frac{L^2\rho_1^2}{\pi^2}.$$

(30.89)从 $t_0=t$ 到 $t_0=t+1$ 积分，得

$$V(t)\leqslant\frac{\sqrt{5}}{2}\rho_1^2+\frac{8\rho_1^4}{4L}+\frac{L^2\rho_1^2}{4\pi^2}+\frac{3\rho_1^2}{\delta^{\frac{1}{2}}}$$

$$\leqslant\rho_2^1 C_0^1(1+L+\delta^{-\frac{1}{2}}).$$

可以推出，对 $t\geqslant t_0$，

$$|v'(t)|^2\leqslant V(t)+|v(t)|^2\leqslant C_0^2\rho_1^2(1+L+\delta^{-\frac{1}{4}})^2.$$

现转向原来的方程(30.87)．我们有

$$Au=u'''',\quad R(u)=-2u''-3\delta(u')^2u''+(u')^2+\alpha u.$$

吸收集为

$$B=\{u\in H;\ |u'|\leqslant\rho_1,\ |u''|\leqslant\rho_2\}.$$

首先考虑两个不同解之差的方程．令

$$w=u_1-u_2,$$

其中 u_1、u_2 为方程(30.87)的两个解，则 w 满足

$$w_t+w''''+2w''-3\delta[(u_1')^2u_1''-(u_2')^2u_2'']$$
$$+[(u_1')^2-(u_2')^2]+\alpha w=0.\qquad(30.90)$$

$\bar{u}=u_1+u_2$，则

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|^2+|w''|^2+\alpha|w|^2$$

$$=3\delta(u_1''\bar{u}'w',w)+3\delta((u_2')^2w'',w)+(\bar{u}'w',w)$$

$$\leqslant3\delta|u_1''|_{L^2}|\bar{u}'|_{L^2}|ww'|_{L^\infty}$$
$$+3\delta|w''|_{L^2}|w|_{L^2}|(u_2')^2|_{L^\infty}+|\bar{u}'||w'||w|_{L^\infty}$$

$$\leqslant6\delta\rho_2\rho_1|w|_{L^\infty}|w'|_{L^\infty}$$
$$+6\delta|w''||w||u_2'|_{L^\infty}|u''|_{L^2}+2\rho_1|w|^{\frac{1}{2}}|w'|^{\frac{3}{2}}$$

$$\leqslant6\delta\rho_2\rho_1|w||w''|+6\delta\rho_1\rho_2|w||w''|+2\rho_1|w|^{\frac{5}{4}}|w''|^{\frac{3}{4}}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}|w''|^2 + C_1(\delta^2\rho_1^2\rho_2^2 + \rho_1^{\frac{8}{5}})|w|^2$$

$$\leqslant \frac{1}{2}|w''|^2 + C_2(\delta^2\rho_1^2\rho_2^2 + \rho_1^{\frac{8}{5}})|w|^2.$$

由格隆沃尔不等式,

$$|w(t)| \leqslant \exp\{C_2[\delta^2\rho_1^2\rho_2^2 + \rho_1^{\frac{8}{5}}]t\}|w(0)|, \qquad (30.91)$$

因此 $S(t)$是 Lip 映射, Lip 常数由(30.91)所估计. 记

$$\lambda(t) = |w''(t)|^2/|w(t)|^2, \qquad \xi(t) = w(t)/|w(t)|^2,$$

则有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|^2 + (\lambda(t) - C_2[(\rho_1^{\frac{8}{5}} + \delta^2\rho_1^2\rho_2^2)])|w|^2 \leqslant 0.$$

再应用格隆沃尔不等式, 可得

$$|w(t)| \leqslant \delta(t)|w(0)|, \qquad (30.92)$$

其中

$$\delta(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t \lambda(\tau)d\tau + \frac{C_2}{2}[\rho_1^{\frac{8}{5}} + (\delta\rho_1\delta_2)^2]t. \qquad (30.93)$$

为证 $S(t_*)$的挤压性质, 设 $t = t_*$,

$$\lambda_* = \lambda(t_*) \geqslant \frac{1}{2}\lambda_{N_0+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{L}(N_0+1)\right)^4. \qquad (30.94)$$

考虑商模 $\lambda(t)$满足的方程

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\lambda(t) = \frac{1}{|w|^2}(w_t, (A-\lambda)w)$$

$$= -|(A-\lambda)\xi|^2 + \left(\frac{R(u_2)-R(u_1)}{|w|}, (A-\lambda)\xi\right)$$

$$\leqslant -\frac{1}{2}|(A-\lambda)\xi|^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{|w|^2}|R(u_1)-R(u_2)|^2. \qquad (30.95)$$

现估计非线性项之差

$$|R(u_1) - R(u_2)|$$

$$= |-2w'' - 3\delta[(u')^2 w'' + 2v''\bar{u}'w'] + 2\bar{u}'w'|$$

$$\leqslant 2|w''| + 3\delta|(u')^2|_{L^\infty}|w''|$$

$$+ 6\delta|v''||\bar{u}'||w'|_{L^\infty} + 2|\bar{u}'||w'|_{L^\infty}$$

$$\leqslant 2\lambda^{\frac{1}{2}}|w|+3\delta|u'||w''|\lambda^{\frac{1}{2}}|w|$$

$$+6\delta\rho_2\rho_1|w'|^{\frac{1}{2}}|w''|^{\frac{1}{2}}+2\rho_1|w|^{\frac{1}{4}}|w''|^{\frac{3}{4}}$$

$$\leqslant(2+3\delta\rho_1\rho_2)\lambda^{\frac{1}{2}}|w|+6\delta\rho_1\rho_2\lambda^{\frac{3}{8}}|w|+2\rho_1\lambda^{\frac{3}{8}}|w|.$$

联合(30.96)和(30.95),利用 Young 不等式,得

$$\lambda'\leqslant C_3\delta^2\rho_1^2\rho_2^2\lambda+C_4(\delta\rho_1\rho_2)^2\lambda^{\frac{3}{4}}+4\rho_1^2\lambda^{\frac{3}{4}}$$

$$\leqslant C_5(\delta\rho_1\rho_2)^2\lambda+C_7[(\delta\rho_1\rho_2)^2+\delta^{-\frac{1}{2}}]$$

$$\leqslant C_5(\delta\rho_1\rho_2)^2\lambda+C_8(\delta\rho_1\rho_2)^2.$$

由格隆沃尔引理,

$$\lambda(t)\leqslant e^{\beta_1(t-t_0)}\lambda(t)-(1-e^{\beta_1(t-t_0)})(\beta_2/\beta_1),\qquad(30.96)$$

其中 $\beta_1=C_2(\delta_1\rho_1\rho_2)^2$、 $\beta_2=C_8(\delta\rho_1\rho_2)^2$.

对 $0\leqslant t_0\leqslant t$, 在(30.96)中求 $\lambda(t_0)$. 利用(30.94),可得

$$\lambda(t_0)\geqslant e^{\beta_1(t_1-t_*)}\lambda_*+\frac{\beta_2}{\beta_1}(e^{\beta_1(t_1-t_*)}-1).$$

上式对 t_0 从 $t_0=0$ 到 $t_0=t_*$ 积分,有

$$\int_0^{t_*}\lambda(t_0)dt_0\geqslant\frac{1}{\beta_1}(1-e^{-\beta_1t_*})\lambda_*-\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)t_*.\qquad(30.97)$$

记

$$t_*=\beta_1^{-1}=C_5^{-1}(\delta\rho_1\rho_2)^{-2}$$

$$=-C_5^{-1}L^{-6}(HL+\delta^{-\frac{1}{4}})^{-2},\qquad(30.98)$$

则从(30.93)得到

$$\delta_*=\delta(t_*)\leqslant-\frac{1}{4\beta_1}\lambda_*+\beta_2\beta_1^{-2}-\frac{C_2}{2}(\rho_1^{\frac{8}{5}}+(\delta\rho_1\rho_2)^2)\beta_1^{-1}.$$

(30.99)

为了使 $\delta_*<\frac{1}{8}$, 必须

$$\lambda_*\geqslant C_6\max\{\beta_1,\ \beta_2\beta_1^{-1}+\rho_1^{\frac{8}{5}}+(\delta\rho_1\rho_2)^2\}$$

$$=C_6\max\{(\delta\rho_1\rho_2)^2,\ 1,\ \rho_1^{\frac{8}{5}}+(\delta\rho_1\rho_2)^2\}$$

$$\geqslant C_7\max\{\delta^2(\delta^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}})^4(1+L^2+\delta^{-\frac{1}{2}}),\ 1,\ (\delta^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}})^{\frac{8}{5}}$$

$$+L^6(1+L^2+\delta^{-\frac{1}{2}})\}$$

$$\geqslant C_8\max\{1,\ L^6(1+L^2+\delta^{-\frac{1}{2}})+\delta^{-\frac{4}{5}}L^{\frac{12}{5}}\}$$

$$\geqslant C_9\max\{L^8,\ L^6\delta^{-\frac{1}{2}},\ L^{12}\delta^{-\frac{4}{5}}\}.$$

利用(30.94),如果

$$N_0\geqslant C_0\max\{L^2,\ L^{\frac{10}{4}}\delta^{-\frac{1}{8}},\ L^{\frac{8}{5}}\delta^{-\frac{1}{5}}\},$$

则 $\delta_*<\frac{1}{8}$. 另一方面,$S(t)$在 $t=t_*$ 上的 Lip 常数能估计为

$$L_*=\mathrm{Lip}_B(S_*)\leqslant\exp C_2((\delta\rho_1\rho_2)^2+\rho_1^{\frac{8}{5}})t_*$$

$$\leqslant\exp\left(\frac{C_2}{C_5}+C_{11}\delta^{-\frac{3}{10}}\right).$$

其中我们用到了 $\rho_1^{\frac{8}{5}}/\beta_1\leqslant C\delta^{-\frac{3}{10}}$. 最后估计惯性集的分形维数,

$$d_F(M)\leqslant N_0\frac{\ln\left[\left(\frac{2L_*}{\theta_*}\right)+1\right]}{\ln\frac{1}{\theta_*}}$$

$$\leqslant C_{12}\delta^{-\frac{3}{10}}\max\{L^3,\ L^{\frac{10}{4}}\delta^{-\frac{1}{8}},\ L^{\frac{8}{5}}\delta^{-\frac{1}{5}}\},\qquad(30.100)$$

其中 $\theta_*=2\delta_*$. 于是得到如下命题

命题2 存在柯尔莫戈洛夫-西瓦申斯基-Spiegel 方程(30.77)在 B 中的惯性集 M_0,它的分形维数可估计为

$$d_F(M_0)\leqslant C_{12}\delta^{-\frac{3}{10}}\max\{L^3,\ L^{\frac{10}{4}}\delta^{-\frac{1}{8}},\ L^{\frac{8}{5}}\delta^{-\frac{1}{5}}\},\qquad(30.101)$$

其中 C_{12} 为绝对常数,依赖于 C_0. 进一步,存在绝对常数 C_{13} 和 C_{14},使

$$\mathrm{dist}_{L^2}(S(t)_B,\ M_0)\leqslant C_{13}\exp(-C_{14}L^2(1+L+\delta^{-\frac{1}{4}})^2t).\qquad(30.102)$$

证明 (30.101)已经证明. 至于收敛性,利用(30.42), δ_* 取自(30.99), t_* 取自(30.98), 即得到(30.102).

附录 A 基本符号和函数空间

$\mathbb{R}^n$ 表示 n 维欧几里得空间，$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是 $\mathbb{R}^n$ 中的任意点. Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域，$\partial\Omega$ 是 Ω 的边界，$D^\alpha u(x)$表示函数 $u(x)$形如 $\dfrac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$ 的导数，其中 $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$是多重指标，$\alpha_i\geqslant 0$; $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 是导数的阶.

几个基本函数空间的定义

$\mathscr{L}_p(\Omega)$表示由所有在 Ω 上可测、关于 Ω 为 $p\geqslant 1$ 次可积的函数组成的巴拿赫空间，其中的模由等式 $\|u\|_{\mathscr{L}_p(\Omega)}=\left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{1/p}$定义. 如 $\boldsymbol{u}(x)$是向量函数，$\boldsymbol{u}=(u_1, \cdots, u_N)$，则

$$\|\boldsymbol{u}(x)\|_{\mathscr{L}_p(\Omega)}=\left(\sum_{i=1}^{N}\|u_i\|^p_{\mathscr{L}_p}\right)^{1/p}.$$

当 $p=\infty$ 时，$\mathscr{L}_\infty(\Omega)$是在 Ω 上所有可测和本质有界的实函数所组成的空间. 它是一个巴拿赫空间，具有模

$$\|u\|_{\mathscr{L}_\infty(\Omega)}=\sup_{x\in\Omega}\operatorname{ess}|u(x)|.$$

当 $p=2$ 时，$\mathscr{L}_2(\Omega)$为一具有内积

$$(u, v)=\int_\Omega u(x)\bar{v}(x)dx$$

的巴拿赫空间，其中 $\overline{v(x)}$表示函数 $v(x)$的复数共轭.

索伯列夫空间 $\mathscr{W}_p^m(\Omega)$表示由 $D^l u(x)\in\mathscr{L}_p(\Omega)$所组成的函数空间$(0\leqslant|l|\leqslant m)$，它是一个巴拿赫空间，具有模

$$\|u\|_{\mathscr{W}_p^m(\Omega)}=\left(\sum_{|l|\leqslant m}\|D^l u\|^p_{\mathscr{L}_p(\Omega)}\right)^{1/p}.$$

当 $p=2$ 时，$\mathscr{W}_2^m(\Omega)=\mathscr{H}^m(\Omega)$为希尔伯特空间.

$\mathscr{D}(\Omega)$ ($\mathscr{D}(\bar{\Omega})$)表示具有含于 $\Omega(\bar{\Omega})$ 内紧致支集的无穷可微函

数的空间.

$\mathscr{W}^m_{0,p}(\Omega)$表示$\mathscr{D}(\Omega)$依模$\mathscr{W}^m_p(\Omega)$的闭包. 当$p=2$时,

$$\mathscr{W}^m_{0,2}(\Omega)=H^m_0(\Omega).$$

$\mathscr{L}_p(a,b;\mathscr{X})$表示$(a,b)$到巴拿赫空间$\mathscr{X}$的$\mathscr{L}_p$函数空间. 它是一个巴拿赫空间, 具有模$\|f\|_{\mathscr{L}_p(a,b;\mathscr{X})}=\left(\int_a^b\|f(t)\|^p_{\mathscr{X}}dt\right)^{1/p}$.

类似地, 有$\mathscr{L}_p(0,T;\mathscr{W}^p_m(\Omega))$、$\mathscr{W}^p_m(0,T;\mathscr{L}_r(\Omega))$等函数空间. 当$p=\infty$时, $\mathscr{L}_\infty(a,b;\mathscr{X})$表示从$(a,b)$到$\mathscr{X}$的一切可测和本质有界的函数空间, 它是一个巴拿赫空间, 具有模

$$\|f\|_{\mathscr{L}_\infty(a,b;\mathscr{X})}=\sup_{t\in(a,b)}\text{ess}\|f(t)\|_{\mathscr{X}}.$$

类似地, 当$-\infty<a<b<+\infty$, 我们用$\mathscr{C}([a,b];\mathscr{X})$来表示$[a,b]$到$\mathscr{X}$的所有连续函数所形成的空间, $\mathscr{C}^k([a,b];\mathscr{X})$为从$[a,b]$到$\mathscr{X}$的$k$次连续可微函数空间(其中$k\in\mathbb{N}$), 它们是巴拿赫空间, 分别具有模

$$\|f\|_{\mathscr{C}([a,b];\mathscr{X})}=\sup_{t\in[a,b]}\|f(t)\|_{\mathscr{X}},$$

$$\|f\|_{\mathscr{C}^k([a,b];\mathscr{X})}=\sum_{j=0}^k\left\|\frac{d^jf}{dt^j}\right\|_{\mathscr{C}([a,b];\mathscr{X})}$$

$\mathscr{C}^l(\Omega)$表示函数$u(x)$在Ω内具有直到l阶连续可微的函数空间

$$\mathscr{C}^{(n,\lambda)}(\overline{\Omega})=\{u(x)\,|\,u(x)\text{具有满足}\lambda\text{阶赫尔德条件的}n\text{阶导数}\},$$

其中 $$\|u(x)\|_{\mathscr{C}^{n,\lambda}(\overline{\Omega})}=\|u(x)\|_{\mathscr{C}^n(\overline{\Omega})}+\sum_{|\alpha|=n}\mathscr{H}_\lambda(\mathscr{D}^\alpha u),$$

$$\mathscr{H}_\lambda(\varphi)=\max_{x,y\in\overline{\Omega}}\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^\lambda}.$$

几个常用的不等式

1. 柯西不等式

$$|a_{ij}\xi_i\eta_j|\leqslant\sqrt{a_{ij}\xi_i\xi_j}\sqrt{a_{ij}\eta_i\eta_j}.$$

它对任意非负二次型$a_{ij}\xi_i\xi_j$, $a_{ij}=a_{ji}$, 以及任意实数$\xi_1,\cdots,\xi_n$和

$\eta_1, \cdots, \eta_n$ 成立.

2. 带 ε 的柯西不等式

$$ab \leqslant \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2.$$

它对任何 $\varepsilon > 0$ 和任意非负的 a、b 成立.

3. Young 不等式

$$ab \leqslant \frac{1}{p}(\varepsilon_1 a)^p + \frac{1}{p'}\left(\frac{b}{\varepsilon_1}\right)^{p'}. \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \quad \varepsilon_1 > 0$$

4. 赫尔德不等式

$$\left|\int_\Omega u(x)v(x)dx\right| \leqslant \left(\int_\Omega |u(x)|^q dx\right)^{1/q}\left(\int_\Omega |v(x)|^{q'} dx\right)^{1/q'},$$

其中 $q \geqslant 1$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$. 更一般的赫尔德不等式

$$\left|\int_\Omega \prod_{i=1}^{s} u_i(x)dx\right| \leqslant \prod_{i=1}^{s}\left(\int_\Omega |u_i|^{\lambda_i} dx\right)^{1/\lambda_i},$$

其中 $\lambda_i \geqslant 1$, $\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{\lambda_i}=1$.

5. 格隆沃尔不等式

设 $u(x)$ 和 $h(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的非负连续函数, $c \geqslant 0$ 是常数. 若对 $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$$u(x) \leqslant c + \int_0^x h(t)u(t)dt,$$

则对 $0 \leqslant x \leqslant 1$, 有

$$u(x) \leqslant c\exp\left(\int_0^x h(t)dt\right).$$

6. Jensen 不等式

设 Φ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的下凸函数, $f \in \mathscr{L}_1[a, b]$, 则

$$\Phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \Phi(f(t))dt.$$

附录 B 索伯列夫嵌入定理和内插公式

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一有界区域. 如果存在正数 α 和 h, 使得对任何 $x\in\Omega$, 能构造一个以 x 为顶点、锥角为 α、高度为 h 的正球锥 V_x 位于 Ω 内, 则称区域 Ω 具有锥性质.

例如, 如 $\partial\Omega\in\mathscr{C}^1$, 或 Ω 为凸区域, 则 Ω 具有锥性质.

定理 B.1 设 Ω 为具有锥常数为 α、h 的锥性质有界区域. 设 $u(x)\in\mathscr{C}^m(\Omega)\cap\mathscr{W}_p^m(\Omega)$, 其中 $p>1$. 如 $m>n/p$, 则

$$\sup_{x\in\Omega}|u(x)|\leqslant c\|u\|_{\mathscr{W}_p^m(\Omega)}\tag{B.1}$$

其中常数 c 仅依赖于 α、h、m 和 p.

推论 1 设 $m-\dfrac{n}{p}>l$, 其中 l 为非负整数, 则有

$$|D^\alpha u(x)|\leqslant c\|u\|_{\mathscr{W}_p^m(\Omega)}, \qquad 0\leqslant|\alpha|\leqslant l\tag{B.2}$$

推论 2 设 $u(x)\in W_p^m(\Omega)$, 又有 $m-n/p>l$, 其中 l 为非负整数, 则 $u(x)\in c^l(\Omega)$ (几乎处处).

定理 B.2 设 $u\in c_0^1(R^n)$, p 为大于 n 的实数, 则对任何 x、$y\in\mathbb{R}^n$, 有

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{1-n/p}}\leqslant c\sum_{i=1}^n|D_iu|_{0,p}=c\|Du\|_{L_p(R^n)},\tag{B.3}$$

其中常数 c 仅依赖于 n、p.

定理 B.3 设 q、r 为任意实数, 满足 $1\leqslant q$, $r\leqslant\infty$; j、m 为任意整数, 满足 $0\leqslant j<m$. 若 $u\in c_0^m(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\|D^ju\|_{L_p}\leqslant c\|D^mu\|_{L_r}^{\alpha}\|u\|_{L_q}^{1-\alpha},\tag{B.4}$$

其中
$$\frac{1}{p}=\frac{j}{n}+\alpha\left(\frac{1}{r}-\frac{m}{n}\right)+(1-\alpha)\frac{1}{q},$$

且

$$\frac{j}{m}\leqslant\alpha\leqslant1.\tag{B.5}$$

常数 c 仅依赖于 n、m、j、q、r、α. 如 $m-j-\frac{n}{r}$ 为非负整数, 则当 $j/m\leqslant\alpha<1$ 时, (B.4) 成立。

定理 B.4 (有界域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 上的内插公式) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界域, $\partial\Omega\in c^m$, $u(x)\in W_r^m(\Omega)\cap L_q(\Omega)$, $0\leqslant l\leqslant m$. 当 $m-l-n/r$ 不是非负整数时,

$$\frac{l}{m}\leqslant\alpha\leqslant1,\ 1\leqslant r,\ q\leqslant\infty,\ \frac{n}{q}-l=\alpha\left(\frac{n}{r}-m\right)+(1-\alpha)\frac{n}{q};$$

当 $m-l-\frac{n}{r}$ 是非负整数时,

$$\frac{l}{m}\leqslant\alpha<1,\qquad 1<r<\infty,\ 1<q<\infty$$

则有

$$\|D^l u\|_{L_p(\Omega)}\leqslant c\|u\|^{\alpha}_{W_r^m(\Omega)}\|u\|^{1-\alpha}_{L_q(\Omega)},\tag{B.6}$$

其中常数 $c=c(\Omega,\ n,\ m,\ j,\ q,\ r,\ \alpha)$.

当 $p>0$ 时,

$$\|u\|_{p,\Omega}=\left(\int_\Omega|u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}};$$

当 $p<0$ 时,

$$h=\left[\frac{n}{|p|}\right],\qquad \lambda=\frac{n}{|p|}-h.$$

(i) 当 $\lambda=0$ 时,

$$\|u\|_{p,\Omega}=\sup_{x\in\Omega}|D^h u(x)|;$$

(ii) 当 $\lambda>0$ 时,

$$\|u\|_{p,\Omega}=\sup_{x,y\in\Omega}\frac{|D^h u(x)-D^h u(y)|}{|x-y|^\lambda}.$$

定理 B.5 (嵌入定理) 假定有界域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega\in c^m$.

(1) 当 $m-\frac{n}{r}>0$ 时,

$$\|u\|_{C^{(h,\alpha)}(\Omega)}\leqslant c\|u\|_{W_r^m(\Omega)},\tag{B.7}$$

$$h=m-\left[\frac{n}{r}\right]-1\geqslant0.$$

当 $m-\frac{n}{r}\neq$ 正整数时，$1\leqslant r<\infty$，$\alpha-1-\left[\frac{n}{r}\right]$；

当 $m-\frac{n}{r}=$ 正整数时，$1<r\leqslant\infty$，$0\leqslant\alpha<1$，

当 $0\leqslant\alpha<1-\left[\frac{n}{r}\right]$，$0\leqslant h\leqslant m-\left[\frac{n}{r}\right]-1$ 时，嵌入算子 $W_r^m(\Omega)$ $\hookrightarrow c^{(h,\alpha)}(\Omega)$ 是完全连续的，或嵌入是紧致的。

(2) 当 $m-l-\frac{n}{r}=0$ 时，

$$\|u\|_{W_p^l(\Omega)}\leqslant c\|u\|_{W_r^m(\Omega)};\quad 1\leqslant p<\infty,\ 1\leqslant r<\infty \tag{B.8}$$

当 $m-l-\frac{n}{r}<0$ 时，

$$\|u\|_{W_p^l(\Omega)}\leqslant c\|u\|_{W_r^m(\Omega)}; \tag{B.9}$$

$$1\leqslant r\leqslant\infty,\quad 1\leqslant p\leqslant\frac{n}{n/r-m+l}$$

当 $0\leqslant l\leqslant m-1$，$1\leqslant p<\frac{n}{n/r-m+l}\left(m-l-\frac{n}{r}\leqslant 0\right)$ 时，

$$W_r^m(\Omega)\hookrightarrow W_p^l(\Omega)$$

是完全连续的嵌入算子.

定理 B.6 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界域，$\partial\Omega\in c^1$，设 $1\leqslant r\leqslant\infty$，$0\leqslant k<m$，则嵌入算子

$$W_r^m(\Omega)\hookrightarrow W_p^k(\Omega)$$

是紧致的，其中

$$1\leqslant p<\frac{n}{k+n/r-m},\qquad k+\frac{n}{r}-m\geqslant 0.$$

附录C 不动点原理

定理 C.1(压缩映象原理) 如(X, d)是一完备度量空间, f: $X\to X$ 具有性质

$$d(f(x), f(y))<kd(x, y), \qquad k<1, \forall x, y\in X$$

则存在唯一的不动点 $x_0\in X$, 使得

$$f(x_0)=x_0.$$

定理 C.2(布劳韦尔不动点定理) 设 $B_n=\{x \mid x\in \mathbb{R}^n, \|x\|\leqslant 1\}$, f: $B_n\to B_n$ 是连续的, 则 f 在 B_n 中具有一个不动点.

定理 C.3(庞加莱不动点定理) 设 f: $E_n\to E_n$ 为连续映射, 且设对某个 $u>0$ 和一切 $\lambda>0$ 有

$$f(u)+\lambda u\neq 0, \qquad \forall u, \quad \|u\|=r$$

则存在一点 u_0, $\|u_0\|<r$, 使得 $f(u_0)=0$.

定理 C.4(绍德尔不动点定理) 设 C 是 X 中的有界闭凸集, 且 f: $C\to C$ 是紧致的映射, 则存在点 $x_0\in C$, 使得 $f(x_0)=x_0$.

定理 C.5 设 C 是 X 中的紧致凸集, f: $C\to C$ 是一连续映射, 则存在 $x_0\in C$, 使得 $f(x_0)=x_0$.

定理 C.6 设 C 是自反巴拿赫空间, T: $X\to X^*$ 是闭的线性映射, 满足

$$|\langle Tx, x\rangle|\geqslant c\|x\|^2, \qquad \forall x\in X, \text{某个 } c>0$$

则 $Tx=x$.

定理 C.7 设 X 为自反巴拿赫空间, 且

$$B:\ X\times X\to C$$

对第一个变量是线性的, 对第二个是反线性的, 且具有如下性质

(i) $\quad |B(x, y)|\leqslant c_1\|x\|\|y\|, \qquad \forall x、y\in X$

(ii) $\quad |B(x, y)|\geqslant c_2\|x\|^2, \qquad \forall x、y\in X$

则对每一个 $x\in X$，存在唯一元素 $x^*\in X^*$，使得

$$X^*(y)=B(y,\ x).$$

定理 C.8（勒雷-绍德尔不动点定理） 设 E 为巴拿赫空间，若对于非线性算子方程

$$x-A(x,\ \lambda)=0,\qquad x\in E,\ \lambda\in I=[0,\ 1]$$

满足如下条件：

（i）对于 $X\in I$，算子 A：$E\times I\to E$ 是完全连续算子；对有界 $M\subset E$，算子 A 对 λ 一致连续.

（ii）对于方程 $x-A(x,\ \lambda)=0$ 的所有可能解 x，对 $\lambda\in I$，依 E 中的范数 $\|x\|_E$ 一致有界.

（iii）当 $\lambda=0$ 时，$A(x,\ 0)=x$ 在 E 中有唯一解.

则对一切 $\lambda\in I$，泛函数 $x-A(x,\ \lambda)=0$ 至少有一个解.

科学家中外译名对照表

Ablowitz, M. J.	阿布洛维茨	Galerkin, B. G.	伽辽金
Agmon, S.	阿格蒙	Gallouet, T.	加卢特
Airy, G. B.	爱里	Gegliardo, E.	加利亚尔多
Aubin, J. P.	奥宾	Gelfand, I.	盖尔芳德
Bäcklund, A. V.	贝克隆	Gerdjikov, V. S.	格吉科夫
Banach, S.	巴拿赫	Gilbert, W.	吉伯
Beltrami, E	贝尔特拉米	Gordon, W.	戈登
Benard, H.	贝纳德	Gram, J. P.	格拉姆
Benjamin, T. B.	本杰明	Gronwall, T. H.	格隆沃尔
Besov, O. V.	别索夫	Hale, J. K.	黑尔
Bishop, A. R.	毕肖普	Hausdorff, F.	豪斯多夫
Bochner, S.	博丝纳	Hesse, L. O.	赫斯
Born, M.	波恩	Hilbert, D.	希尔伯特
Boussinesq, M. J.	布森内斯克	Hirota, R.	广田
Brezis, H.	布雷齐斯	Hodge, W. V. D.	霍奇
Burgers, J. M.	伯格斯	Holemes, D.	霍利姆斯
Caffarelli, R. Kohn.	卡法雷利	Hopf, E.	霍普夫
Cauchy, A. L.	柯西	Infeld, M. L.	英菲尔德
Darboux, J. G.	达布	Ivanov, I.	伊凡诺夫
de Vries, G.	德弗里斯	John, F.	约翰
Dirichlet, P. G.	狄利克雷	Joskphon, B. D.	约瑟夫森
Egorov, I. P.	叶戈罗夫	Kadomtsev, B. B.	卡多姆采夫
Fatou, P. J. L.	法图	Karman, T. von	卡曼
Feigenbaum, M. J.	费根鲍姆	Kolmogorov, A. N.	柯尔莫哥洛夫
Fermi, E.	费米	Korteweg, D. J.	科特韦格
Foias, C.	富瓦阿斯	Kronecher, L.	克罗内克
Fogedby, H. C.	福格迪	Kundu, A.	孔杜
Frechet, N. R.	弗雷歇		

参考文献

[1] 郭柏灵、庞小峰,《孤立子》,科学出版社,1987.

[2] 谷超豪等,《孤立子理论与应用》,浙江科学技术出版社,1990.

[3] P. Biler, Asmptotic Behaviour in Time of Solutions to Some Equations Generalizing the Korteweg--de Vries--Burgers Equation, *Bulletin of The Polish Academy of Sciences Mathematics*, Vol **32**, No. **5--6**, 1984, 275--282.

[4] A. Sili, C. Sulem, P. L. Sulem, On the long time behavior of a generalized KdV equation, *Acta. Appl. Math.*, **7**, 1986, 35—47.

[5] M. Tsutsumi, Nonrelativistic approximation of nonlinear klein-Gordon equations in two space dimensions, *Nonlinear Analysis, TMA*, **8**, 1984, 637—643.

[6] B. Najman, The Nonrelativistic Limit of The Nonlinear Klein-Gordon Equation, *Nonlinear Analysis , TMA*, **15**, 1990, 217---228.

[7] J. Albert, On the decay of Solution of the generalizeel Benjamin-Bona-Mahony equation, *J. Math. Anal. Appl.*, **141**, 1986, 117—134.

[8] M. A. Rammala, On the asymptotic behavior of solutions of generalized Korfeweg-de Vries equations, *J. Math. Appl*, **140**, 1989, 228—240.

[9] P. Biler, Long time behavior of solutions of the generalized Benjamin-Bona-Mahony equation in two space dimensions, *Differential and Integral Equations*, Vol **5**, No. **4**, 1992, 891—901.

[10] M. E. Schonbek, L^2 decay for weak solutions of the Navier-Sfokes equations, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **88**, 1985, 209—222.

[11] M. E. Schonbek, Lower bounds of rates of decay for solutions to the Navier-Sfokes equations, *J. Amer. Math. Soc.*, **4** (**3**), 1991, 423---449.

[12] R. T. Glassey, On the blowing up of solution to Cauchy problems

for nonlinear Schrödinger equation, *J. Math. Phys.* Vol **18**, No **9**, 1977, 1794—1797.

[13] V. K, Kalantarov. O A. Ladyzhenskaya, The occurrence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic type, *J. Sov. Math.*, **10**, 1978, 53—70.

[14] M. M. Tom, Smoothing properties of Some weak solutions of the Benjamin-Ono equation, *Differential Integral Equ.*, **3**, 1990. 683—694.

[15] L. Abdelouhab, J. L. Bona, M. Felland and J. C. Saut, Nonlocal model for nonlinear dispersive waves, *Phys, D.*, **40**, 1989, 360—392.

[16] P. Constantin and J. C. Saut, local Smoothing properties of dispersive equations, *J. Amer. Math. Soc.*, **1**(**2**), 1988, 413—439.

[17] G, ponce, Regularity of solutions to nonlinear dispersive equations, *J. Diff. Equ.*, **78**, 1989, 122—135.

[18] W. A. Strauss, Nonlinear wave equations, *Conference board of the mathematical sciences regional Conference series in mathematics*, No. **73**, published for the Cenference Boarel of the Mathematical Sciences by American Mathematical Society, providence, Rhode Island, 1989.

[19] W. A. Strauss, on wenk solutions of semi-linear hyperbolic equations, *Anais Acad. Brasil. Cienc.*, **42**, 1970. 645—651.

[20] J. Ginbre and G. velo, The global Cauchy problem for the nonlinear Klein-Gordon equation, *Math. Z.*, **189**, 1985, 487—505.

[21] T. Kato, On nonlinear Schrödinger equations, *Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor.*, **46**, 1987, 113—129.

[22] P. Brenner and W. von Wahl, Global Classical solutions of nonlinear wave equations, *Math. Z.* **176**, 1981, 27—121.

[23] M. Tsutsumi, N. Hayshi, Classical solution of nonlinear Schrödinger equations in higher dimensions. *Math. Z.*, **177**, 1981, 217—234.

[24] N. Hayashi, Classical solution of nonlinear Schrödinger equations, *Manscripta Math.*, **55**, 1986, 171—190.

[25] N. Hayashi, Smoothing effect for nonlinear Schrödinger equations

in exterior domain, *J. Functional Analysis*, **89**, 1990, 444—458.

[26] N. Hayashi, M. Tsutsumi, $L^\infty(R^m)$ decay of classical solutions of nonlinear Schrödinger equations, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **104A**, 1986, 309—327.

[27] N. Hayashi, K. Nakamita and M. Tsutsumi, On solution of the initial value problem for the nonlinear Schrödinger equations, *J. Funct. Anal.*, **71**, 1987, 218—245.

[28] M. Tsutsumi, On global solutions to the initial-boundary value problem for the nonlinear Schrödinger equations in exterior domains, *Comm. Part. Diff. Equ.*, **16**, 1991, 885—907.

[29] J. L. Bona, R. L. Sachs, Global existance of Smooth solution and stability of solitary waves for a generalized Boussinesq equation, *Comm. Math. Phys.*, **118**. 1988, 15.

[30] A. Cohen and T. kappeler, Solutions to the Kortewegde Vries With initial profile in $L_1^1(R) \cap L_N^1(R^+)$, *SIAM, J. math. Anal.*, **18**, 1987, 991—1025.

[31] J. Ginibre and Y. Tsutsumi, Uniqueness of solution for the generalized Korteweg-de Vries equations, *SIAM, J. math. Anal.*, **20**, 1989, 1388—1425.

[32] H. Levine, Instability and non existence of global solution to nonlinear wave equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **192**, 1974, 1—21.

[33] F. John, Blow up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions, *Manuscripta Math*, **28**, 1979, 235—268.

[34] R. Glassey, Finite-time blow up for solutions of nonlinear wave equations, *Math. Z.*, **177**, 1981, 323—340.

[35] T. Sideris, Nonexistence of global solutions to semilinear wave equations in high dimensions, *J. Diff. Equ.*, **52**, 1984, 378—406.

[36] J. Schaeffer, The equation $u_{tt} - \Delta u = |u|^p$ for the critical value of p. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **110A**, 1985, 31—44.

[37] P. A. Clarhson, M. D. Kruskal, New similarity reductions of the Boussinesq equation, *J. Math. Phys.* **30**(**10**), 1989, 2201—2213.

[38] G. W. Bluman and J. D. Cole, *Similarity Methods for Differential Equations, Applied Math. Sci.*, Vol **13**, Springer, Berlin, 1974.

[39] J. Weiss, M. Tabor and G. Carnevale, The painlevé Property for partial differential equations, *J. Math. Phys.*, **24**(2), 1983, 522—526.

[40] J. Weiss, The painléve property and Bäcklund transformations for the sequence of Boussinesq equations, *J. Math. Phys.*, **26**(2), 1985, 258—269.

[41] P. Constantin, C. Foias, and R. Temam, Attractors respresenting turbulent flows, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, **314**, 1985.

[42] J. M. Ghidaglia and. B. Héron, Dimension of the attractors associated to the Ginzburg-Landau Partial differential equation, *Phy, D*, **28**, 1987, 282—304.

[43] J. M. Ghidaglia and R. Temam, Attractors for damped nonlinear hyperbolic equations, *J. Math. Pures Appl.*, **66**, 1987, 273—319.

[44] J. M. Ghidaglia, weakly damped forced Korteweg-de Vries equations as a finite dimensional dynamical system in the long time, *J. Diff. Equ.*, **74**, 1988, 369—390.

[45] J. M. Ghidaglia, Finite dimensional behavior for weahly damped driven Schrödinger equations, *Annales de l' Institut Henri Poincaré, Anal. non linéaire*, Vol **5**, No **4**, 1988, 365—405.

[46] A. V. Babin, M. I. Vishik, Attractors of partial differential equations and estimate of their dimension, Uspekhi Mat. Nauk, 38, 1983, 133—187.

[47] A. V. Babin, M. I. Vishik, Regalar attractors of semigroups and evolution equations, *J. Math. pures Appl.*, **62**, 1983, 441—491.

[48] A. V. Babin, M. I. Vishik, Maximal attractors of semigroups corresponding to evolution differential equations, *Mat. Sbornik*, **126**, 1985 (In Russian), *Math. USSR-Sbornik*, **54** 1986, 387—408 (in English).

[49] O. A. Ladyzhenskaya, On the attractors of nonlinear evolution problems, in *the Boundary Valun Problems of Mathematical Physics and related Questions in Functional Analysis*, Seminar of the Steklov Institute, **18**, Leningrad, 1987.

[50] O. A. Ladyzhenskaya, Attractors for semi-groups and evolutions equations, Lezioni Lincee, Cambridge University Press, 1991.

[51] J. K. Hale, Geneviéve Raugel, Upper Semicontinuity of the attractor for a singularly perturbed hyperbolic equation, *J. Diff. Equ.*, **73**, 1988, 197—214.

[52] B. Nicolaenko, B. Scheurer and R. Temam, Some global dynamical properties of a Class of pattern formation equations., *Comm. Part. Diff. Equ*, **14(2)**, 1989, 245—297.

[53] C. Foias, B. Nicolaenko, G. R. Sell and R. Temam, Inertial manifolds for the Kuramoto-Sivashinsky equation and an estimate of their lowest dimension, *J. Math. Pures et appl.*, **67**, 1988, 197—226.,

[54] O. Goubet, Construction of approximate inertial manifolds using wavelets, *SIAM J. Math. Anal.*, **23**, 1455—1481.

[55] S. Titi, On approximate inertial manifolds to the Navier-Stokes equations. *J. Math. Anal and Appl.*, **149**, 1990, 540—557.

[56] A. Debussche, On the Construction of families of approximate inertial manifolds, *J. Diff. Equ.*, **100**, 1992, 173—201.

[57] A. Eden, C. Foias, B. Nicolaenko and R. Temam, Inertial Sets for dissipative evolution equations, Part I: Constraction and applications, preprint, 1990, 1—129.

[58] F. Jauberteau, C. Rosier and R. Temam, The nonlinear Galerkin method in Computational field dynamics, *Appl. Numer. Math.*, **6**, (1989—90), 361—370.

[59] M. Marion and R. Temam, Nonlinear Garlerkin methods, *SIAM, J. Numer. Anal.*, **6**, 1989, 1139—1117.

[60] R. Temam, Stability analysis of the nonlinear Galerkin method, *Math. Comp.*, **157**, 1991, 477—505.

[61] M. Marion and R. Temam, Nonlinear Galerkin Methods: The finite element Case, *Numer. Math.* **57**, 1990, 205—226.

[62] Guo Boling, The global solution for some systems of nonlinear Schrödinger equations, *Proceedings of DD-1 Symposium*, **3**, 1980, 1227—1246.

[63] Guo Boling, The initial value problem with integral nonlinear Schrödinger systems of equations, *Acta Math. Scientia*, **1**, 1981, 261—274.

[64] Guo Boling, The global solutions of some problems for a system of equations of Schrödinger-Klein Gordon field, *Scientia Sinica*, **Ser A, 25**, 1982, 898—901.

[65] 郭柏灵，一类广义 KdV 方程的整体解，《数学学报》，**25(6)**，1982, 641—656.

[66] Guo Boling, The initial and periodic value problems of one class of nonlinear Schrödinger equations describing excisions in molecular crystals, *Acta Math. Scientia*, **2**, 1982, 269—275.

[67] Guo Boling, Initial value problem and periodic boundary problem for some systems of multi-dimensional nonlinear Schrödinger equation of high order, *KEXUE TONGBAO*, **27**, 1982, 915—920.

[68] Guo Boling, On some problem for a wider class of the system of Zakharov equations, *Proceedings of DD-3 Symposium*, 1982, 395—415.

[69] Guo Boling & Shen Longjun, The periodic initial value problem and the initial value problem for the system of KdV equation Coupling with nonlinear Schrödinger equations, *Proceedings of DD-3 Symposium*, 1982, 417—435.

[70] Zhou Yulin and Guo Boling, On the system of the generalized Korteweg-de Vries equations, *Proceedings of DD-3 Symposium*, 1982, 739—758.

[71] 郭柏灵，非线性波和孤立子，《力学与实践》，**4(2)**，1982, 8—16.

[72] Guo Boling, Initial boundary value problem for one class of system of multi-dimensional nonlinear Schrödinger equations with wave operator, *Scientia Sinica*, Ser **A**, **23**, 1983, 561—575.

[73] 郭柏灵，KdV-非线性 Schrödinger 方程耦合方程组周期初值问题和柯西问题整体解的存在，唯一性，《数学学报》，**23**(5)，1983, 513—532.

[74] 郭柏灵，复 Schrödinger 场耦合 Boussinesq 型自洽场方程组的整体解，《数学学报》，**26**(3)，1983, 295—306.

[75] 郭柏灵，某些非线性 Schrödinger 方程组的柯西问题的解当 $t\to\infty$ 时的渐近性质，《浙江大学学报》，第二期，1983, 23—31.

[76] Guo Boling, The global solution for the initial value problem of 3-dimensional FDS nonlinear wave equation, *KEXUE TONGBAO*, **Special Issue**, 1983, 20—25.

[77] 郭柏灵，广义 KdV 方程的守恒律和行波解结构，《科学探索》，3(2)，1983，31—40.

[78] 郭柏灵，一类多维非线性波动方程组的整体解，《数学年刊》，5A(4)，1984，401—408.

[79] Zhou Yulin & Guo Boling, Existence of weak solution for boundary problems of ferro-magnetic Chain, *Scientia Sinica* (Ser A), **27**, 1984, 799—811.

[80] 周毓麟、郭柏灵，高阶广义 KdV 型方程组的初值问题和周期初值问题，《数学学报》，**27** (2)，1984，154—176.

[81] Zhou Yulin & Guo Boling, A Class of general systems of Korteweg-de Vries type I: weak solutions with derivative, *Acta Math. Appl. Sinica*, **2**, 1984.

[82] Guo Boling, The global solution and "blow up" phenomenon for a class of system of nonlinear Schrödinger equations with the magnetic field effect, *Chin. Ann. Math.*, **6B**(3), 1985, 281—287.

[83] 郭柏灵，具波动算子的非线性 Schrödinger 方程组的孤立子解和它的"blow up"问题，《科学探索》，5(3)，1985，92—98.

[84] Zhou Yulin & Guo Boling, Some boundary problems of the spin systems and the system of ferro-magnetic chain I: Nonlinear boundary problems, *Acta Math., Scientia*, **6**, 1986, 321—337.

[85] Zhou Yulin & Guo Boling, Some boundary problems of the spin systems and the system of ferro-magnetic chain II: Mixed problems and others, *Acta. Math. Scientia*, **70**, 1987, 121—132.

[86] Zhou Yulin & Guo Boling, The weak solution of homogeneous boundary value problem for the system of ferro-magnetic chain with several variables, *Scientia Sinica* (Ser A), **4**, 1986, 337—349.

[87] 郭柏灵，三维非线性波动方程组解的"blow up"问题和渐近形态；《郑州大学学报》第一期，1986，13—22.

[88] 郭柏灵、汪礼礽，非线性 Schrödinger 方程和 KdV 方程的周期解，《华东师大学报(自然科学版)》第四期，1986，42—46.

[89] Zhou Yulin & Guo Boling, Existence of the global weak solutions for the systems of generalized KdV type of higher order with several variables, *Scientia Sinica*, **Ser A, 29**, 1986, 375—390.

[90] Zhou Yulin & Guo Boling, Initial value problems for a nonlinear singular integral-differential equation of deep water, *Lect. Notes in Math.*, **1306**, [illegible], 27—2[illegible]0.

[91] Guo Boling, The global solution for one class of the system of LS nonlinear wave interaction, 《数学研究与评论》, **71(1)**, 1987, 69—76.

[92] Guo Boling, Initial-boundary value problem for one class of the system of multi-dimensional inhomogeneous GBBM equations, *Chin. Ann. Math.*, **8B(2)**, 1987, 226—238.

[93] 郭柏灵,具磁场效应的非线性 Schrödinger 方程组的初边值问题,《应用数学学报》,**10(2)**, 1987, 189—202.

[94] Guo Boling, Initial-boundary value problem for one class of system of multi-dimensional nonlinear Schrödinger-Boussinesq type equations, 《数学研究与评论》,**8(1)**, 1988, 61—71.

[95] Guo Boling, Global solution of the initial-boundary value problem for a class of systems of multi-dimensional strongly nonlinear Schrödinger equations of fourth order, *Northeastern Math. Journal.*, **3**, 1987, 399—409.

[96] Qianshun Chang, Guobin Wang and Boling Guo, Conservative Scheme for a Model of Nonlinear Dispersive waves and its Solitary waves Induced by Boundary Motion, Journal of Computational Physics, Vol 93, No. 2, 1991, 360—475.

[97] 郭柏灵,BBM-非线性 Schrödinger 方程耦合方程组的整体解,《工程数学学报》,**4(3)**, 1987, 1—12.

[98] Guo Boling, Existence and nonexistence of global solution and soliton solution for a class of systems of generalized Zakharov equations, *Proceeding of 4th Workshop on Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems*, "Nonlinear Evolutions", 1987, 711—720.

[99] Guo Boling, The initial value problem for generalized Peker-Choquard nonlinear Schrödinger equations in 3-dimensions, *J. Part. Diff. Eqs.*, **2 (2)**, 1989, 1—25.

[100] Guo Boling, Existence and nonexistence for the initial-boundary value problem of one class of system of multi-dimensional

nonlinear Schrödinger equations with operator and their soliton solution, *Math. Acta Scientia*, **9** (**4**), 1989, 45—56.

[101] Guo Boling & Jiang Lunin, The initial value problem for one Class of KdV equations with singular nonhomogeneous terms, *Math. Acta Scientia*, **9**(**4**), 1989, 379—390.

[102] Guo Boling & Shen Longjun, Galerkin finite element solution for nonlinear neutron transport equation, *Comm. Appl. Math. and Comp.*, **2**(**1**), 1989, 8—20.

[103] Guo Boling, The global solution and its asymptotic behaviour for one class of system of nonlinear Schrödinger equations with magnetic effects, *Comm. Appl. Math. Comp.* **2**(**2**), 1988, 12—25.

[104] Guo Boling & Shen Longjun, The global solution of initial value problem for nonlinear Schrödinger–Boussinesq equation in three dimensions, *Acta Math. Appl. Sinica*, **6**, 1990, 11—21.

[105] Guo Boling, Spectral method for solving two dimensional Newton-Boussinesq equations, *Acta Math. Appl. Sinica*, **5**(**3**), 1989, 203—218.

[106] Guo Boling & Wang Lirang, Some problems of nonlinear Schrödinger equation with the effect of dissipation, *J. Part. Diff. Eqs.*, **3**(**3**), 1990, 1—23.

[107] Guo Boling, Some problems of the generalized Kuramoto-Sivashinsky type equations in dispersive effects, "**Nonlinear Physics**", 1989, Springer-Veley, 236—241.

[108] 郭柏灵,一类非均匀介质中多维非线性 Schrödinger 方程组的初值和初边值问题,《厦门大学学报(自然科学版)》,第 **29** 卷第 **1** 期, 1990, 13—18.

[109] Guo Boling & Pan Xiuduo, N soliton solution for a class of the system of LS nonlinear wave interaction, *Chinese Phys. Lett.*, **7**(**6**), 1990, 241.

[110] Guo Boling, Global smooth solutions for the system of Zakharov equations in nonhomogeneous medium, *Northeastern Math. J.*, **6** (**4**), 1990, 379—390.

[111] 郭柏灵,一类广义 LS 型方程组的周期初值和初值问题,《工程数学学报》,第 **8** 卷第 **1** 期,1991, 47—53.

[112] Guo Boling & Pan Xingde, Similarity transformation, the structure of the traveling waves solution and the existence of a global smooth solution to generalized Kuramoto-Sivashinsky type equations. *Math. Acta. Scientia*. **11(1)**, 1991, 48—55.

[113] 郭柏灵，一类四阶强非线性Schrödinger方程组整体解的存在性和“Blow up”问题,《高校应用数学学报》, 第**6**卷第**2**期, 1991, 173—182.

[114] Zhou Yulin, Guo Boling & Tan Shaobin, Existence and uniqueness of smooth solution for system of ferro-magnetic chain, *Science in China*, Ser. **A**, **34**, 1991, 257—266.

[115] Guo Boling, The global smooth solution and the universal attractors for some dissipative nonlinear evolution equation, "*Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems*", Eds by V. G. Makhankov, O. K Pashaev, Springer Verlag, 1991, 194—196.

[116] Guo Boling, The existance and nonexistence of a global smooth solution for the initial value problem of generalized Kuramoto-Sivashnisky type èquations, «数学研究与评论», **11(1)**, 1991, 57—69.

[117] Guo Boling and Tan Shaobin, On smooth solutions to the initial value problem for the mixed nonlinear Schrödinger equations, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **119A**, 1991, 31—45.

[118] Guo Boling & Tan Shaobin, Global smooth solution for a coupled nonlinear wave equations, *Math. Meth. in Appl. Sci.*, **14**, 1991, 419—425.

[119] Guo Boling & Wu Xianghui, The spectral method for the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation, *J. Comp. Math.*, **9(4)**, 1991, 330—336.

[120] Guo Boling, The existence of global solution and "blow up" Phenomenon for a system of multi dimensional Symmetric regularized wave equations; *Acta Math. Appl. Sinica*, **8(1)**, 1992, 59—72.

[121] Zhou Yulin, Guo Boling and Tan Shaobin, On the Cauchy problem for the equation of finite-depth fluids, *J. Part. Diff.*

Eqs., **5(1)**, 1992, 1—16.

[122] Guo Boling & Tan Shaobin, Mixed initial-boundary value problem for some multidimensional nonlinear Schrödinger equations including damping, *J. Part. Diff., Eqs.*, **5(2)**, 1992, 69—80.

[123] Guo Boling & Tan shaobin, Global smooth solution for nonlinear evolution equation of Hirota type, *Science in China*, Ser. **A, 35,** 1992, 1425—1433.

[124] Guo Boling & Tan Shaobin, Cauchy problem for a generalized nonlinear dispersive equations, *J. Part. Diff. Equ.*, **5(4)**, 1992, 37—50.

[125] Zhou Yulin, Sun Hesheng and Guo Boling, Geometrical extensions for systems of ferro-magnetic chain, *Science in China*, Ser **A, 36(4)**, 1993, 927—939; **36(12)**, 1993, 1422—1434.

[126] Guo Boling & Hong Minchun, Landau-Lifshitz Equations of the ferromagnetic spin Chain and harmonic maps, *Calculus of variations and PDE*, **1**, 1993, 311—334.

[127] Guo Boling & Jing zhujun, On the generalized Kuramoto-Sivashinsky type equations with the dispersive effects, *Ann. Math. Res.*, **25**, 1992, 1—24.

[128] Guo Boling & Su Fengqiu, The global attractors for the periodic initial value problem of generalized Kuramoto-Sivashinsky type equation in multi-dimensions, *J. Part. Diff. Equ.*, **6(3)**, 1993.

[129] 郭柏灵,《粘性消去法和差分格分的粘性》,科学出版社,1993.

[130] Guo Boling, The nonlinear Galerkin methods for the generalized Kuramoto-Sivashinsky type equations,《数学进展》, 第**22**卷第**1**期,1993.

[131] Guo Boling, The nonlinear Galerkin methods for Newton-Boussinesq equations in two dimensions,《数学进展》, 第**22**卷第**1**期,1993, to appear in Chin. Ann. Math.

[132] F. W. J., Olver,《Asymptotics and Special Functions》, Academis Press, New York, 1974.

[133] L. Caffarelli, R. Kohn and L. Nirenberg, partial reqularity of suitable weak solutions of the Navier-stokes equations, *Comm.*

Pure. Appl. Math, **35**, 1982, 771—831.

[134] A. P. Calderón, Commutators of singular integral operators, *Proc. Nat. Acad. Sc.* USA, **53**, 1965, 1092—1099.

[135] V. E. Zakharov, The Collapse of Langmuir wares, *Soviet Phys. JETP*, **35** (1972), 908.

[136] G. D. Doolen, D. F. Dubois and H. A. Rose, *Phys. Rev. Lett.*, **51** (1983), 335.

[137] P. A. Robinson and D. L. Nowman, *Phys. Fluids*, **B 1**, 1989, 2323.

[138] Y. Kuramoto, *Progr. Theoret. Phys. Suppl.*, **64**, 1978, 346—367.

[139] G. Sivashinsky, *Acta Astronaut*, **4**, 1977, 1117—1206.

[140] M. A. Aimar and P. Denar, Universita de TULON et da VAR, *proprint*, 1982.

[141] T. Shang and G. Sivashinsky, *J. de Physique*, **43**, 1981, 459—466.

[142] Y. Kuramoto and T. Yamada, *Prog. Teor. Phys.* **56**, 1976, 679.

[143] B. Nicolaenko, *Nuclear Phys.* **B** (proc suppl), **2**, 1987, 453—484.

[144] M. Fabrikant, «Nonlinear waves» (Nauka, Moscow, 1981) (in Russian)

[145] D. A. Russell and B. Ott, *Phys. Fluids*. **24**, 1981, 1976.

[146] F. Kh. Abdullaev, *Phys. reports*, **179**, 1989, 1—78.

[147] A. R. Bishop et al., *Phys. Rev. Lett.*, **50**, 1983, 346.

[148] O. H. Olsen et al., *Phys. Rev.*, **B**, **33**, 1986, 168.

[149] 郭柏灵，广义 Kuramoto-Sivashinsky 型方程周期初值问题的整体吸引子，《自然科学进展》，第 **3** 卷第 **1** 期，1993，63—76.

[150] Boling Guo, Min-Chun Hong and Fengqin Su, The global attractors for Landau-Lifshitz equation of ferromagnete spin chain on Compact manifolds, *Proceedings of the International Conference on Nonlinear Evolution PDE*, Beijing, China, June 21—25, 1993.

[151] Boling Guo and Dengyun Chan, On infinite conservation laws of generalized Heisenberg equation, *Acta. Math. Scientia*, **13**, 1993, 298—302.

[152] Yulin Zhou and Boling Guo, The global attractors of Cauchy problem for dissipative Benjamin-Ono type equation, *Proceedings of the International Conference on Nonlinear Evolution PDE*, Beijing, China, June 21—25, 1993.

[153] Boling Guo and Youde Wang, Global attractors for initial value problems of Chan-Hilliard equations on Compact manifolds, *Advance in Math.*, **23(1)**, 1994, 91—92.

[154] Boling Guo and Linge Yang, The boundary value problem for some high order multi-dimensions system of nonlinear Schrödinger equations, *Ann. Math. Researches*, **26(1)**, 1993, 35—44.

[155] Boling Guo and Yaping Wu, Stability of solitary waves for the nonlinear derivative Schrödinger equation, *Advances in Math.*, **22(5)**, 1993, 473—475., to appear in *J. Diff. Equ.*.

[156] Boling Guo and Shaobin Tan Long time behavior for the equation of finite depth fluids, to a ppear in *Comm. Math. Phys.*

[157] Boling Guo and Fengxin Chen, Finite dimensional behavior of global attractor for weakly damped nonlinear Schrödinger-Boussinesq equations, to appear in *Phys. D.*

[158] Boling Guo and Linge Yan, The global attractors of the periodic initial value problem for a coupled nonlinear wave equation, to appear in *Math. Method in Appl. Science.*

[159] Boling Guo and Linghai Zhang, Decay of solutions to the magnetohydrodynamics equations in two space dimensions, *Proc. Roy. Soc. London*, A **449**, 1995, 79—91.

[160] Boling Guo and Hongjun Gao, The finite behavior for generalized Ginzburg-Landau equation, *Prog. Nat. Science*, **4**, 1994.

[161] Boling Guo and Guangwei Yuan, The initial-boundary value problem for the Boussinesq equations with data in L^p, to appear.

[162] Boling Guo and Guangwei Yuan, On the suitable weak solutions for Cauchy problems of the Boussinesq, equation, to appear in *Nonlinear Analysis, TMA*.

[163] Boling Guo and You-de wang, Generalized Landau-Lifshitz systems of ferromanetic spin chai n type and harmonic maps, to appear.

[164] Yulin Zhou and Boling Guo, Global solution and their large time

appear.

behavior of Cauchy problan for equations of deep water type, to

[165] Guo Boling, The finite dimensional behavior of the global attractors for the generalized Lanndou-Lifshitz on Compact manifolds, Proceedings of workshop "Qualitative Aspects and Application of Nonlinear Evolution Equations", 149—155, 1994, word sci., Singapore, New Jersey, Landon, Hong Kong.

[166] Guo Boling, Finite Dimensional Behaviol for Weakly Damped Generalized KdV-Burgers Equations, Wortheast Math. J., **10**(3) (1994), 309—319.

[167] R. Temam, Infinite Dimensional Dynamical System in Mechanics and Physics, Springer-Verlag, 1988.